[1]

1. Bevezetés

Ebben a cikkben röviden leírom, hogyan-miképp született a *matematikai analízis,* más néven kalkulus vagy a differenciál- és integrálszámítás. A jobb érthetőség kedvéért a mai jelöléseket alkalmazom, jelentősen leegyszerűsítve ezzel a korabeli kutatók nehézségeit. Először ismertetem az ókori és az újkori előzményeket. Később körvonalazom a kalkulus alkotóinak, *Newtonnak* és *Leibniznek* a kezdeti és a kiérlelt eredményeit. Végül mesélek a felfedezés elsőbbségéről folyó éles vitáról. A cikknek több célja is van: 1. Megmutatni, hogy milyen érdekes és hasznos dolog a matematika. 2. Szemléltetni, hogy a nagy gondolatok hosszú vajúdással, számos jelentős részeredmény kidolgozása után születnek meg a zsenik fejében, de gyakran egymástól függetlenül, és nagyjából egyidőben.

A tagolás kedvéért a gondolatmenet szempontjából fontos állításokat tételként mondom ki, a mellékesek viszont a példák vagy a feladatok között szerepelnek (az írás végén megadom a megoldásvázlatokat).

2. Ókori előzmények

Az analízis ókori előzményei közül egy-egy jellemző eredményt említek meg a terület- (vagy térfogat)-, illetve az érintőszámításról, amelyet középiskolában is tanítanak. Felhívom a figyelmet arra, hogy a vizsgált kérdések jóval túlmutatnak az ókor gyakorlati követelményein, és egy olyan igényes elméletet tükröznek, amelyre csak a 17. századtól kezdve lesz majd gyakorlati igény.

Az első eredmény az ókor egyik legnagyobb matematikusától, *Arkhimédésztől* (meghalt i.e. 212) származik, az R-sugarú félgömb térfogatának képlete. Talán erre volt a legbüszkébb, állítólag a bizonyítás ötletét vésette a sírjára is.

1. tétel (Arkhimédész, i.e. 3. sz.). *Az R-sugarú félgömb térfogata az R-sugarú alapkörű és R magasságú henger térfogatának a $\frac{2}{3}$-ada:*

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Bizonyításvázlat. Középiskolából ismert, hogy Arkhimédész a gömb térfogatát úgy számította ki, hogy egy R-sugarú és magasságú hengerből „kivonta” a beleírt kúpot, és a Pitagorasz-tétel segítségével megállapította, hogy minden magasságban a „különbség” test és a félgömb vízszintes metszetének a területe azonos. Ekkor belátható, hogy a két test térfogata is egyenlő [3]. $\square$

A második eredmény az ókor egyik leghíresebb geométerétől, *Apollóniusztól* származik. Azt kell tudni hozzá, hogy egy folytonosan differenciálható konkáv görbe *érintője* egy olyan egyenes, amelynek egy közös pontja van a görbével, és végig a görbe fölött halad.

2. tétel (Apollóniusz, i.e. 210 körül). *Az $y^2 = 2px$ (fekvő) parabola felső ágának x_0 pontbeli érintője az y-tengelyt $\frac{y_0}{2}$ magasságban metszi, ahol $y_0^2 = 2px_0$.*

Megjegyzés. A 2. tételből elemi geometriailag levezethető, hogy a parabolatükörbe vízszintesen beeső fénysugarak a visszaverődés után átmennek a $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ koordinátájú ponton. Ezért hívják e pontot *gyújtópontnak,* fókusznak.

3. Újkori előzmények

Hosszú vesztegélés után, a 16. századra teljesen megújult Európa szellemi élete. Amerika felfedezése és a kopernikuszi fordulat (t.i. a Föld kering a Nap körül) a gyakorlat számára is megkövetelte a görög örökség feldolgozását és továbbfejlesztését. Ennek egyik szakaszaként 1630 körül *René Descartes* és *Pierre Fermat* bevitték az algebrai szemléletet a geometriába, megalkották a koordinátageometriát. Ennek segítségével a korábbinál jóval könnyebben lehetett geometriai és egyéb feladatokat megoldani. (A 2. tételben szereplő koordinátageometriai jelöléseket a görögök általánosan még nem ismerték!)

Először két általános (nem geometriai) eredményt említek. Megcserélve a fenti sorrendet, az első tétel az érintőszámításról szól.

3. tétel (Fermat, 1630 körül). *Legyen $\alpha > 0$ egy racionális szám, és $x > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor az x^α függvény x pontbeli érintőjének meredeksége $\alpha x^{\alpha-1}$.*

Bizonyításvázlat. Itt csak a természetes kitevőre igazoljuk a tételt és α helyett n-et írunk, az általános bizonyítást az 1. feladatban tűzzük ki. Legyen y egy x-től különböző valós szám és írjuk föl az

$$y^n - x^n = (y - x)\left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1}\right)$$

[1] Köszönetemet fejezem ki *Pataki Jánosnak* a cikk írásához nyújtott segítségéért.

azonosságot. Innen

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1}.$$

Behelyettesítve a jobb oldalon $y = x$-et, a bal oldalra nx^{n-1} adódik. Fermat még nem ismerte a határérték fogalmát, de a $\frac{0}{0}$ alak nem okozott neki különösebb gondot. $\square$

1. feladat. Igazoljuk negatív, illetve racionális kitevőre is a 3. tételt.

A területszámításról szól a

4. tétel (Fermat, 1636). *Legyen $\alpha \neq -1$ egy racionális szám és legyen a és b két pozitív valós szám. Ekkor az x^α függvény alatti terület a és b között*

$$\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Bizonyításvázlat. Osszuk föl az a és b közötti szakaszt m részre úgy, hogy az osztópontok mértani sorozatot alkossanak: $x_i = aq^i$, $i = 1, 2, \ldots, m-1, m$. Írjuk ki a téglányösszeget:

$$S_m = a^\alpha(aq - a) + \ldots + a^\alpha q^{\alpha(i-1)}\big(aq^i - aq^{i-1}\big) + \ldots + a^\alpha q^{\alpha(m-1)}\big(aq^m - aq^{m-1}\big).$$

A $q^{\alpha+1}$ hányadosú mértani sor összegképletével meghatározzuk az összeg értékét:

$$S_m = a^{\alpha+1}\frac{(q-1)\big(q^{(\alpha+1)m} - 1\big)}{q^{\alpha+1} - 1} = \frac{(q-1)\big(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\big)}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Ha $m \to \infty$, akkor $q \to 1$, a 3. tétel értelmében $b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}$ szorzója $\frac{1}{\alpha+1}$-hez tart. $\square$

A 4. tétel egyetlen egy esetben nem érvényes, ha $\alpha = -1$. Az eredményt ekkor a *Napier* által 1614-ben fölfedezett természetes ($e = 2{,}718\ldots$) alapú logaritmus adja, amelyre még az 5. példában visszatérünk.

4*. tétel (*Saint Vincent*, 1622?–1647 között). A hiperbola alatti terület

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a.$$

Bizonyításvázlat. Ekkor a 4. tétel bizonyításában

$$S_m = m(q-1) = \frac{(q-1)(\ln b - \ln a)}{\ln q}.$$

„Csak” azt kell tudni, hogy éppen a természetes alapú logaritmusra igaz, hogy

$$\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{\ln q} = 1.$$

Erre a kérdésre majd élesebb fegyverek birtokában visszatérünk (5. példa és 4. feladat). $\square$

A 3. és a 4. tétel segítségével gépiesen is megoldhatjuk a két ókori feladatot (megtalálhatjuk az 1. és a 2. tételt).

1. példa. Parabolatükör. A 3. tétel értelmében az $y^2 = x$ görbe x_0 pontbeli érintőjének meredeksége $y_0' = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, tehát $y = y_0 + m(x - x_0)$ az $x = 0$ pontban

$$y = y_0 - mx_0 = \sqrt{x_0} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x_0 = \frac{\sqrt{x_0}}{2} = \frac{y_0}{2}.$$

2. példa. Az R sugarú félgömb térfogata $\frac{2\pi R^3}{3}$. Valóban, állítsuk a félgömböt akármelyik főkörére, és r magasságban a főkörrel párhuzamos síkkal messük el. Ekkor egy $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kört kapunk, s ennek területét a magasság szerint *integrálva* (ezt a szót Leibniz később találta ki!) adódik a térfogat:

$$V = \pi\int_0^R (R^2 - r^2)\,dr = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Figyelemre méltó, hogy *integráláskor* ismét megjelenik Arkhimédész remek gondolata a henger és a kúp különbségéről, de mechanikus módszerünk most már magától adja az ötletet.

A görög matematika ismerte a mi „nevezetes szorzatainkat” és sík-, illetve térmértani jelentést tulajdonított nekik. Ilyen a kéttag négyzetére és köbére vonatkozó azonosság: $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ és $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. A későbbiekre való tekintettel $x+y$ helyett inhomogén alakban írjuk föl a kéttagot: így az $(1+h)^2 = 1+2h+h^2$ és $(1+h)^3 = 1+3h+3h^2+h^3$ azonosságokat kapjuk. Ezt általánosítja a következő tétel tetszőleges n kitevőre.

5*. tétel (Klasszikus binomiális tétel). *Legyen h egy valós szám, és n egy természetes szám. Az $(1+h)^n$ kifejezés a következő n-edfokú polinom:*

$$(1+h)^n = 1+nh+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}h^k+\ldots+nh^{n-1}+h^n,$$

ahol $k! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ jelöli a k-faktoriálist.

Életrajzi kitérőként megemlítem, hogy a 3. és a 4. tétel felfedezője, *Pierre Fermat* (1601–1665) francia jogász volt, aki életében semmilyen munkáját sem közölte nyomtatásban, csak barátainak (köztük Descartes-nak és Pascalnak) küldte meg levélben eredményeit. Mai hírnevét nem annyira a már említett analízisbeli eredményeinek, mint inkább az ún. Fermat-sejtésnek köszönheti. E kérdés nehézségére jellemző, hogy a világ legjobb matematikusainak hosszas erőfeszítése után is csak 1994-ben sikerült bizonyítani a sejtést. *Blaise Pascal* (1622–1664) nevével az időjárásjelentésben mindennap találkozunk, de a francia nyelv egyik legnagyobb mestereként is számon tartják.

4. A felfedezés kapujában

A 3. és a 4. tétel összehasonlításából gyerekjáték lett volna rájönni arra, hogy a differenciálás és az integrálás egymás inverz művelete: b helyett x-et írva a 4. tételben:

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]' = \left[\frac{(n+1)x^n}{n+1}\right] = x^n,$$

és viszont. De az akkori matematikusokat nem érdekelték az általános *függvények,* magát a szót is csak Leibniz találta ki.

1670 körül kezdőként megjelent a színen történetünk két főszereplője: az angol *Isaac Newton* (1643–1727) és a német *Gottfried Leibniz* (1646–1716). A matematikatörténet két óriása valódi polihisztorként vonult be a tudománytörténetbe: mai napig Newtont a világ egyik, ha ugyan nem a legnagyobb elméleti és kísérleti fizikusának tartjuk, Leibniz-t pedig a világ egyik legnevesebb filozófusának és tudományszervezőjének. A módszerrel is különböző céljuk volt: Newton a fizikában előforduló mozgásegyenleteket (szakszóval: differenciálegyenleteket) akart megoldani; Leibniz pedig egy általános logikai módszert akart megalkotni, amellyel a számolás gyerekjáték.

Newton szinte játékként megnézte, mi történik a binomiális (5*.) tétellel, ha természetes kitevő helyett tört- vagy negatív kitevőt is megenged.

5. tétel (Newton-féle binomiális tétel, 1665). *Legyen $\alpha \neq 0$ valós szám, és legyen $h > -1$ valós szám. Ekkor a polinom helyére egy végtelen sor lép:*

$$(1+h)^\alpha = 1+\alpha h+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}h^k+\ldots.$$

Newton nem bizonyította be a tételt, de felhasználta a tört és negatív kitevős hatványfüggvény érintőjének és integráljának a meghatározására (a 3. és a 4. tétel). Newtont a binomiális tételnek ez az általánosítása ébresztette rá, hogy a polinomok kényszerzubbonyát ledobva, ki kell és ki lehet lépni a végtelen sorok világába, ahol a korábbinál sokkal szélesebb függvényosztályokat tudott vizsgálni.

3. példa. A binom reciproka. Felírjuk a Newton-féle binomiális tételt $\alpha = -1$-re:

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\ldots+(-1)^k x^k+\ldots.$$

Az eredmény nem más, mint a végtelen mértani sor összegképlete, amikor a hányados $-x$. Integráljuk mindkét oldalt 0 és x között a 4. és a 4*. tétel felhasználásával:

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.$$

Csodálatos végtelen hatványsort kaptunk a logaritmus függvényre, amely lehetővé teszi a logaritmus gyors és pontos kiszámítását és nagyon sokjegyű táblázat készítését.

2. feladat. Igazoljuk az 1. feladat állítását az általánosított binomiális tétel segítségével is. (Bár a matematikatörténet-könyvekben mindenütt szerepel ez a feladat, nem igazán látom, hogy miért részesítette Newton előnyben az 1. feladatbeli módszerrel szemben.)

Leibniz fejlődésében az egyik áttörést a következő sor összegzése jelentette:

4. példa (Leibniz, 1673).
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$
Valóban, tagonként behelyettesítve az
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
összefüggést, az egymást követő $\pm$ tagok kiejtik egymást, marad az első tag, 1.

Ez diszkrét változatban azt mutatta Leibniznek, hogy az összegképzésben segít, ha a tagokat az összegfüggvény megváltozásával írjuk fel.

5. Az áttörés

Az áttörés első része a *differenciálszámítás* kidolgozása volt. Ez a megközelítés a függvényt az érintők segítségével vizsgálja. A kulcskérdés az érintő meredekségének kiszámítása volt. Ma ezt a húr meredekségének a határértékeként definiáljuk, de Newton és Leibniz tudatosan lemondott a szabatosságról, és a 3. és a 4. tétel bizonyításánál látott heurisztikus utat követték általánosan is. Mai jelöléssel élve:
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Mind Newton, mind Leibniz kidolgozott egy szabálygyűjteményt, amelyet ma is szinte változatlan formában tanítanak. Például két differenciálható függvény összegének a deriváltja a derivált függvények összege: $(f+g)'=f'+g'$. A szorzat és a hányados deriváltjához már „igazi” képletre van szükség.

6. tétel. *Két függvény szorzatának és hányadosának a deriváltja rendre:*
$$(fg)'=f'g+fg' \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Megemlítjük az összetett függvény deriválásáról szóló láncszabályt és speciális esetét, az inverzfüggvény deriválását.

7. tétel. *a) Ha az $u=g(x)$ folytonosan differenciálható belső függvény behelyettesíthető a szintén folytonosan differenciálható $y=f(u)$ külső függvénybe, akkor a keletkező $y=f\big(g(x)\big)$ összetett függvény deriválható és a derivált a külső és a belső függvény deriváltjának a szorzata:*
$$\big[f\big(g(x)\big)\big]'=f'(u)g'(x).$$

b) Ha az $y=f(x)$ függvény differenciálható és deriváltja nem nulla, akkor létezik inverzfüggvénye, amelynek a deriváltja az eredeti függvény deriváltjának a reciproka:
$$g'(y)=\left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}.$$

Bizonyításvázlat. Heurisztikusan érvelve tekintsük a differenciálhányadosokat törteknek
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{és} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$
s adódik mindkét állítás. $\square$

Ezekkel a szabályokkal minden elemi függvény (hatvány, exponenciális, szögfüggvények kombinációi) deriváltjai előállíthatók a rész-elemi függvények deriváltjainak függvényeként.

Néhány példát mutatunk be az új módszer erejére.

3. feladat. A 7. tétel segítségével is oldjuk meg az 1. feladatot.

5. példa (Exponenciális függvény). Kérdés: Melyik az a függvény, amelynek 0-ban 1 az értéke, és a deriváltja önmaga? A válasz
$$e(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Valóban, félretéve a matematikai szigort, deriváljuk tagonként az $e(x)$ végtelentagú hatványsort: az első tag eltűnik, a második tag az elsővé válik, az n-edik pedig az $(n-1)$-edikké:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Belátható, hogy más ilyen függvény nincsen. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a megoldás éppen az e-alapú *exponenciális* függvény: $e(x) = e^x$, ahol az alapszám

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Megemlítjük, hogy ebben a példában egy *differenciálegyenlet*et oldottunk meg: egy olyan „egyenletrendszert”, amelyben az ismeretlen függvényen kívül a függvény deriváltja is szerepel. Meglepő módon az exponenciális függvény hatványsorát Newton és Leibniz csak közvetve, a logaritmus inverz-hatványsoraként kapta. Csupán jóval később jött rá Euler a közvetlen levezetésre.

4. feladat. Igazoljuk, hogy e^x a 4*. tételnél bevezetett természetes logaritmusfüggvény inverze.

Rátérünk a második részre, a területszámítás általánosítására, a *határozott integrálásra.* Ez az analízis fogalmilag könnyebb, de algoritmikusan nehezebb részre. Fermat-t követve (4. tétel), fölosztjuk a korlátos $[a; b]$ intervallumot n részre:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Vegyük az $[x_i; x_{i+1}]$ szakasz tetszőleges z_i pontját, és képezzük az

$$S_n = f(z_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(z_i)(x_{i+1} - x_i) + \ldots + f(z_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

összeget. Ha az S_n összegnek van határértéke, és ez a határérték független a felosztássorozattól, akkor a függvényt *integrálhatónak* nevezzük, és az integrál értékét a határértékkel azonosítjuk:

$$I = \lim_n S_n.$$

Paradox módon a kalkulus sikeres kidolgozásához le kellett mondani az ókori görögök szabatos gondolkodásáról, és például a síkidomot mint szakaszok összességét kellett elgondolni. Ez sok logikai zavart okozott, de az eredmények önmagukért beszéltek. Csak kétszáz éves késéssel, 1870 körül sikerült kialakítani a kalkulus logikailag szabatos rendszerét.

Némi kísérletezés után, a $\sum_{i=1}^{m} y_i \delta x_i$ összeg „folytonosításaként”, a nagy szigmát némileg kisimítva, Leibniz bevezette az integrálás jelét, s ebből alakult ki a mai

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ezután kimondható az analízis *alaptétele:*

8. tétel (A Newton–Leibniz-formula). *Legyen f egy folytonos függvény a korlátos $[a; b]$ szakaszon. Tegyük föl, hogy létezik egy olyan F függvény, amelynek deriváltja a szakasz minden pontjában megegyezik az f függvény értékével: $F'(x) \equiv f(x)$. Akkor az f függvény integrálja azonos az F függvény változásával. Képletben:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy ha létezik egy ún. *primitív* F függvény, akkor minden $F + c$ függvény is ilyen, ahol c egy tetszőleges állandó.

2. Figyeljük meg, hogy már a speciális 4. tétel bizonyításában is megjelenik az f függvényhez tartozó F primitív függvény és deriváltja.

1. heurisztikus bizonyítás. Legyen $I(x)$ az $f(x)$ függvény $[a; x]$ közti integrálja. Írjuk föl az integrálfüggvény parányi megváltozását:

$$I(x + dx) = I(x) + f(x)\,dx.$$

Ebből egyszerű rendezéssel „következik”, hogy $I'(x) \equiv f(x)$. Tehát az integrálfüggvény kielégíti a fenti differenciálegyenletet. Hány ilyen I függvény van? Tegyük föl, hogy $J'(x) \equiv f(x)$. Vegyük a két függvény különbségét, K-t deriváljuk, és látjuk, hogy $K'(x) \equiv 0$, tehát $K(x) = \text{const.}$ $\square$

2. heurisztikus bizonyítás. Behelyettesítve az $f(x_i) \approx \dfrac{\delta F(x_i)}{\delta x_i}$ közelítést a $\sum_{i=1}^{m} f_i \delta x_i$ téglányösszegben, és egyszerűsítve δx_i-vel:

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\delta x_i \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta F(x_i)}{\delta x_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \delta F(x_i) = F(b) - F(a).$$

Bízva abban, hogy az egyre több tagból álló, de tagonként egyre pontosabb közelítés határértékben a teljes intervallumon pontossá válik, a bal oldalon az f függvény a és b közti integrálját kapjuk, azaz eljutottunk a Newton–Leibniz-képlethez. □

Megjegyzések. 1. Természetesen az $I(x + dx)$ kifejezés nem szabatos, ezért a rá vonatkozó egyenlet sem az. Szabatos bizonyítást csak a 19. században adtak.

2. Érdemes felhasználni egy fizikai analógiát: a sebesség definíció szerint az út idő szerinti deriváltja, az utat pedig a sebesség idő szerinti integráljaként számítjuk ki.

Könnyű igazolni, hogy az összegfüggvény integrálja az integrálok összege. A szorzatfüggvény integráljára azonban már nincs képlet. Általában az integrálási módszerek (a szorzatfüggvény deriváltjával kapcsolatos parciális integrálás és a láncszabállyal kapcsolatos helyettesítéses integrálás) egyaránt az egyik integrál helyett egy másik integrál meghatározását tanácsolják. Sőt, vannak olyan elemi függvények, amelyeknek az integrálja nem is elemi függvény. Algoritmikusan ezért nehezebb az integrálás, mint a differenciálás. Hasonlattal élve: mindenkinek könnyebb az anyanyelvére, mint az anyanyelvéről fordítania.

Két frappáns példát adunk arra, amikor az integrálást érdemes visszavezetni a differenciálásra.

6. példa. A 8. tétel értelmében a 4. tétel következik a 3. tételből:

$$\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]' = x^{\alpha}.$$

5. feladat. A 8. tétel és a 4. feladat segítségével igazoljuk a 4*. tételt.

A pont lezárásaként hadd idézzük magát Leibniz-t a jelölések fontosságáról: „Gondoskodni kell arról, hogy a jelek alkalmasak legyenek a felfedezésre. Ez a legjobban akkor sikerül, ha a jelek röviden kifejezik és mintegy tükrözik a dolog mély természetét, és akkor csodálatos módon csökken a gondolkodásra fordítandó munka.”

6. Az elsőbbségi vita

A cikk végére érve, röviden beszélek a kalkulus felfedezése kapcsán kialakult elsőbbségi vitáról. Nem kétséges, hogy az 1643-ban született Newton cambridge-i diák korában, 1665 körül már többé-kevésbé kidolgozta a kalkulust. (A fiatal lángész ugyanakkor jött rá az általános tömegvonzás elméletére és a fény összetett természetére.) Tanára, Barrow maga is a kalkulus egyik előfutára volt.

1670 körül Newton először fényelméletével rukkolt elő, de itt összeütközött *Hooke*-kal, a Royal Society (az Angol Akadémia) akkori titkárával (a rugótörvény felfedezőjével), és olyan heves vita támadt köztük, hogy Newton megfogadta: lehetőleg kerüli a nyilvánosságot. Attól kezdve sokáig csak legszűkebb baráti körben terjesztette írásait.

Leibniz 1646-ban született, és diplomáciai küldetésen 1673–1676 között Párizsban tartózkodott. Ott összebarátkozott a holland *Huygens*-szel, aki bevezette a matematikailag képzetlen(!) Leibniz-t a magasabb matematika rejtelmeibe. (Huygenst a középiskolából a centripetális gyorsulás felfedezőjeként és a róla elnevezett hullámelv megalkotójaként ismerhetjük.) Leibniz elolvashatta Pascal publikálatlan (azóta elpusztult) leveleit. Tökéletesítette a Pascal-féle számológépet, és 1672-ben fogaskerekes számológépe elismeréseként a 27 éves Leibniz-t a Royal Society tagjává választották. Londoni látogatásai során futólag betekintést nyert Newton egyes írásaiba, és közös érdeklődési körükről – közvetítőkön keresztül – leveleket írt Newtonnak. A bizalmatlan Newton maga csak rejtjelezett jelszavakban válaszolt Leibniznek. Leibniz 1676 körül – Newtontól függetlenül –, felfedezte a kalkulust, és ellentétben a titkolózó Newtonnal, 1684-ben megkezdte a kalkulus nyilvános kifejtését egy általa alapított matematikai folyóiratban. „Leibniz hatalmas érdeme az analízis széles körű propagandája ... és az analízis algoritmusainak teljes automatizálása: az analízis alkalmazására és oktatására olyan módszert talált ki, hogy azok az emberek is élhettek vele, akik egyáltalán nem értették az analízist.”

Newton hosszas noszogatás hatására, 1687-ben publikálja a Principiát, az első korszerű fizikakönyvet. Furcsa módon azonban elsősorban nem az általa teremtett modern analízis eszközeit alkalmazta, hanem visszanyúlt az ókortól örökölt mértani kifejtéshez. Talán félt a kalkulus logikai bukfenceitől, és szorongott, hogy a fizikai elmélete középpontjában álló általános tömegvonzás gondolatát elutasíthatják.

1700 körül Newton végre publikálta egy-két fontosabb matematikai írását. Ekkor lángolt fel a vita Newton és Leibniz hívei közt, hogy valójában melyikük fedezte föl a kalkulust. A vita hamarosan nagyon elmérgesedett. 1712-ben a Royal Society, amelynek akkori elnöke maga Newton volt, „pártatlan” bizottsága plágium vétségében marasztalta el Leibniz-t. Ma már ismert az a Newtontól származó kézirat, amely a bizottság jelentése alapjául szolgált. Leibniz méltatlanul elfelejtve halt meg 1716-ban, míg Newtont az egész világ ünnepelte, és 1727-ben a Westminsterben „mint egy fejedelmet temetik el" (Voltaire).

A történelem fintoraként megemlíthetjük, hogy a 18. század kontinentális matematikája a sokkal ötletesebb leibnizi jelölésrendszert vette át (lásd a 7. és 8. tétel heurisztikus levezetését), és ennek nyomán nyaktörő sebességgel fejlődött. A newtoni jelölésekhez ragaszkodó brit matematika begubózott, s elvágta magát a fejlődéstől. Száz év kellett ahhoz, hogy a britek legalább a matematikában megszabaduljanak „pompás elszigeteltségüktől".

A közölt feladatok megoldásvázlatai

1. feladat. *a*) Helyettesítéssel visszavezetjük a negatív egész kitevőt a pozitív egész kitevőre. Legyen $X = \frac{1}{x}$ és $Y = \frac{1}{y}$ és n egy természetes szám. Ekkor

$$\frac{y^{-n} - x^{-n}}{y - x} = \frac{Y^n - X^n}{Y^{-1} - X^{-1}} = -XY\frac{Y^n - X^n}{Y - X}.$$

Felhasználva a már bizonyított esetet, határértéket véve és visszatérve x-re:

$$-nX^{n-1}X^2 = -nX^{n+1} = -nx^{-n-1}.$$

b) Legyen y egy x-től különböző valós szám, $\alpha = \frac{p}{q} > 0$ racionális szám. Vezessük be az $X = x^{\frac{1}{q}}$ és $Y = y^{\frac{1}{q}}$ változókat. Ekkor

$$\frac{y^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{y - x} = \frac{Y^p - X^p}{Y^q - X^q} = \frac{\frac{Y^p - X^p}{Y - X}}{\frac{Y^q - X^q}{Y - X}}.$$

Az $y \to x$ határértékre térve, a már belátott résztétel szerint a számlálóban pX^{p-1}, a nevezőben qX^{q-1} áll, hányadosuk $\frac{pX^{p-q}}{q} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.

2. feladat. Az $y = x^{\frac{m}{n}}$ egyenlet bal és jobb oldalát egészítsük ki dy-nal és dx-szel: $y + dy = (x + dx)^{\frac{m}{n}}$, és alkalmazzuk a törtkitevős binomiális tételt. Elhagyva a magasabb rendű tagokat:

$$y + dy = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx.$$

Kivonva $y = x^{\frac{m}{n}}$-et és osztva dx-szel, adódik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$$

3. feladat. Az $x = \sqrt{y}$ az $y = x^2$ függvény inverze: Az 1. feladat és a 3. tétel szerint

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

4. feladat. $y = e^x$ deriváltja önmaga: $\frac{dy}{dx} = e^x$, inverzfüggvénye $x = \ln y$. Az inverzfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}, \quad \text{azaz} \quad (\ln y)' = \frac{1}{y}.$$

5. feladat. Mivel $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, azért a 8. tétel szerint az $\frac{1}{x}$ függvény a-tól b-ig terjedő integrálja $\ln b - \ln a$.

Felhasznált irodalom

[1] Fried K., Simonovits M.: *A gondolkodás számítógépes iskolája,* Typotex (Budapest, 2005).

[2] Gingyikin, Sz. G.: *Történetek fizikusokról és matematikusokról,* 3. orosz kiadás (2001). Magyarul: Typotex (Budapest, 2003).

[3] Nagy Gyula: *A Cavalieri-elv,* KöMaL, 1996/9. sz., 341–345. oldal.