I. rész

1. *Hány csúcsa lehet annak az egyszerű teljes gráfnak, amelyben az élek száma a csúcsok számának hatszorosánál kevesebb, de ötszörösénél több?* (*11 pont*)

Megoldás. Egy egyszerű teljes gráfban minden csúcs minden másikkal pontosan egyszer van összekötve. Vagyis egy n csúcsú egyszerű teljes gráfban $\frac{n(n-1)}{2}$ él van.

A feladat szövege szerint a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$5n < \frac{n(n-1)}{2} < 6n.$$

Mivel $n \geq 1$, azért ez a következő alakban is írható: $10 < n-1 < 12$, ahonnan $n-1=11$, $n=12$.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:*

$$\left.\begin{aligned} 4^{\frac{x+y}{1004}} - 4^{\frac{x+y}{2008}} &= 12 \\ 2007^{\log_x(2008y-x)} &= 1 \end{aligned}\right\}. \qquad (12\ pont)$$

Megoldás. Az első egyenlet a következőképpen írható:

$$\left(4^{\frac{x+y}{2008}}\right)^2 - 4^{\frac{x+y}{2008}} = 12,$$

ami $4^{\frac{x+y}{2008}}$-ra másodfokú.

A másodfokú egyenlet gyökei -3 és 4.

A $4^{\frac{x+y}{2008}} = -3$ nem teljesülhet semmilyen valós számpár esetén sem.

A $4^{\frac{x+y}{2008}} = 4$ egyenletből: $x+y=2008$.

Az egyenletrendszer második egyenletéből:

$$\log_x(2008y-x) = 0, \quad \text{azaz} \quad 2008y - x = 1.$$

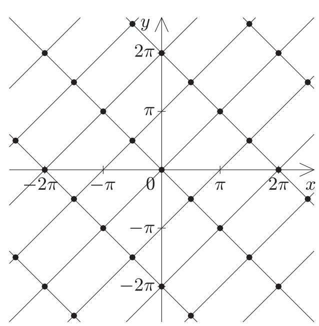
A két egyenletből: $x=2007$; $y=1$.

Ez valóban megoldása az egyenletrendszernek.

3. *Adjuk meg a koordinátasíkon azokat az $(x;y)$ pontokat, amelyek koordinátáira:*

$$\left.\begin{aligned} \cos(x+y) &= 1 \\ \sin(x-y) &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (14\ pont)$$

Megoldás. Az első egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $x+y=2k_1\pi$. Az ezt teljesítő pontok az $y=-x+2k_1\pi$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$ egyenesseregen vannak.



A második egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $x-y=k_2\pi$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$, azaz az ezt teljesítő pontok az $y=x-k_2\pi$ egyenesseregen vannak. A keresett pontok az egyenesek metszéspontjaiban, azaz a

$$\left((2k_1+k_2)\frac{\pi}{2}; (2k_1-k_2)\frac{\pi}{2}\right)$$

pontokban helyezkednek el, ahol $k_1; k_2 \in \mathbb{Z}$.

4. *Egy* 24 *személyes kulcsosházban* 1 db 4 *ágyas,* 1 db 8 *ágyas és* 1 db 12 *ágyas szoba van. A* 4 *ágyas szobában* 1000 Ft *egy személynek egy éjszaka, a* 8 *ágyas szobában* 800 Ft, *míg a* 12 *ágyasban* 700 Ft. *A házban a szobákat létszámtól függően fűtik be, anyagi megfontolások miatt, a táblázatnak megfelelően:*

Személyek száma	1–4	5–8	9–12	13–16	17–20	20–24
Fűtött szobák	4 ágyas	8 ágyas	12 ágyas	4 ágyas + 12 ágyas	8 ágyas + 12 ágyas	Mind-három

Ha már több szobát is fűtenek, akkor feltölthetjük először az olcsóbb helyeket. A házat 1-től 24 főig bármekkora társaság lefoglalhatja.

a) Mikor kevesebb az egy főre jutó átlagos szállásdíj, ha 15 fős vagy ha 21 fős csoport veszi ki a kulcsosházat?

b) Van-e olyan csoportlétszám, amelynél érdemesebb több főre kivenni a házat, mint ahányan vannak?

c) Állítsuk csökkenő sorba az egy főre eső átlagos szállásdíj szerint a létszámokat. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) 15 fő esetén 12-en 700 Ft-ért, 3-an 1000 Ft-ért alszanak, az egy főre eső szállásdíj

$$\frac{12\cdot 700+3\cdot 1000}{15}=760\text{ Ft.}$$

21 fő esetén 12-en 700 Ft-ért, 8-an 800 Ft-ért, és egyvalaki 1000 Ft-ért alszik, így az egy főre jutó költség

$$\frac{12\cdot 700+8\cdot 800+1\cdot 1000}{21}\approx 752{,}4\text{ Ft.}$$

Vagyis 21 fő esetén kevesebb az egy főre eső átlagos költség, mint 15 fő esetén.

b) Ilyen eset akkor fordulhat elő, ha a többletszám miatt egy olcsóbb szobát nyitnak meg. Ilyen lehet

- ha 4 fő helyett 5-öt fizetünk, de ekkor marad 1000 Ft az egy főre eső szállásdíj: $\frac{4\cdot 1000}{4}=\frac{5\cdot 800}{4}$. (3 vagy kevesebb fő helyett 5-öt kifizetni nem jó.)
- ha 8 fő helyett 9-et fizetünk, ekkor $\frac{8\cdot 800}{8}>\frac{9\cdot 700}{8}$, tehát ez megéri (7 vagy kevesebb fő helyett 9-et kifizetni már nem jó.)
- ha 16 fő helyett 17-et fizetünk, de ekkor $\frac{4\cdot 1000+12\cdot 700}{16}=\frac{12\cdot 700+5\cdot 800}{16}$. (15 vagy kevesebb fő helyett 17-et kifizetni már nem jó.)

c) A következő táblázat az átlagos költség alakulását mutatja növekvő létszám mellett:

Fő	1	2	3	4	5	6	7	8
Összes költség	1000	2000	3000	4000	4000	4800	5600	6400
Átlagos költség	1000	1000	1000	1000	800	800	800	800
Fő	9	10	11	12	13	14	15	16
Összes költség	6300	7000	7700	8400	9400	10 400	11 400	12 400
Átlagos költség	700	700	700	700	723,1	742,9	760	775
Fő	17	18	19	20	21	22	23	24
Összes költség	12 400	13 200	14 000	14 800	15 800	16 800	17 800	18 800
Átlagos költség	729,4	733,3	736,8	740	752,4	763,6	773,9	783,3

A táblázat alapján a létszámok sorrendje az átlagos szállásdíj csökkenése alapján (a zárójelben lévő létszámoknál az átlag megegyezik): (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), 24, 16, 23, 22, 15, 21, 14, 20, 19, 18, 17, 13, (9, 10, 11, 12).

II. rész

5. *Egy zsákban kék és piros golyók vannak. Annak az esélye, hogy két húzásból két kék golyót húzunk, ötöde annak, hogy két pirosat húzunk és hatoda annak, hogy mindkét színből egyet. Minden golyó kihúzásának az esélye ugyanannyi. Hány piros és hány kék golyó van a zsákban?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen p a piros golyók száma és k a kékeké, ekkor

$$P(2\text{ kék})=\frac{k}{k+p}\cdot\frac{k-1}{(k-1)+p}=\frac{k(k-1)}{(p+k)(p+k-1)}\,,$$

$$P(2\text{ piros})=\frac{p}{k+p}\cdot\frac{p-1}{(p-1)+k}=\frac{p(p-1)}{(p+k)(p+k-1)}\,,$$

$$P(\text{piros és kék})=\frac{p}{k+p}\cdot\frac{k}{(p-1)+k}+\frac{k}{k+p}\cdot\frac{p}{(k-1)+p}=\frac{2pk}{(p+k)(p+k-1)}\,.$$

Abból, hogy $P(2\text{ kék}) \cdot 6 = P(\text{piros és kék})$, következik, hogy $6k(k-1) = 2pk$ (mivel $(p+k)(p+k-1) \neq 0$), ahonnan $p = 3(k-1) = 3k-3$ (hiszen $k \neq 0$).

Az előzőekhez hasonlóan abból, hogy $P(2\text{ kék}) \cdot 5 = P(2\text{ piros})$, következik, hogy $5k(k-1) = p(p-1)$. Ebbe behelyettesítve $p = 3k-3$-at, rendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $k^2 - 4k + 3 = 0$, melynek gyökei $k = 1$ és $k = 3$.

Az első gyök esetén a piros golyók száma 0 lenne, ami nem lehet, tehát 3 kék és 6 piros golyó van a zsákban.

6. *Egy mértani és egy számtani sorozat megfelelő tagjainak különbsége* 0; -3; 10; 103. *Adjuk meg a két sorozatot.* (*16 pont*)

Megoldás. Mivel a kezdő tagok között 0 a különbség, így legyen a két sorozat: a; aq; aq^2; aq^3 és a; $a+d$; $a+2d$; $a+3d$.

A megfelelő tagok különbségéből:

$$aq - (a+d) = -3, \quad \text{azaz} \quad a(q-1) - d = -3,$$
$$aq^2 - (a+2d) = 10, \quad \text{azaz} \quad a(q^2-1) - 2d = 10,$$
$$aq^3 - (a+3d) = 103, \quad \text{azaz} \quad a(q^3-1) - 3d = 103.$$

A (2)-ből kivonva az (1) kétszeresét kapjuk, hogy $a(q^2 - 2q + 1) = 16$, amiből

$$a(q-1)^2 = 16. \tag{4}$$

A (3)-ból kivonva az (1) és a (2) összegét: $a(q-1)(q^2 + q + 1 - q - 2) = 96$, azaz

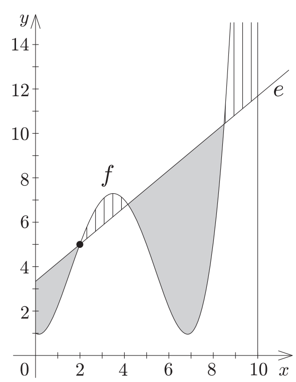
$$a(q-1)^2(q+1) = 96. \tag{5}$$

Mivel sem a, sem $q-1$ nem 0, így eloszthatjuk az (5)-öt a (4)-gyel, ahonnan $q+1 = 6$, azaz $q = 5$. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy $a = 1$, így a két sorozat: $1; 5; 25; 125; \ldots$, illetve $1; 8; 15; 22; \ldots$.

7. *Adjuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{20}(x+1)(x-2)(x-5)(x-8) + 5$$

függvény $(2; 5)$ *pontján átmenő* e *egyenes egyenletét úgy, hogy a* $[0; 10]$ *intervallumban a két görbe által közrezárt terület fele az* e *egyenes felett, fele az* e *egyenes alatt legyen.* (*16 pont*)



Megoldás. Ha a szürke és a vonalkázott területek összegei megegyeznek, akkor az f görbe alatti területe meg kell, hogy egyezzen az e görbe alatti területével a $[0;\ 10]$ intervallumban, azaz

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} e(x)\,dx.$$

Legyen $e(x) = mx + b$, és

$$f(x) = \frac{1}{20}(x+1)(x-2)(x-5)(x-8) + 5 = \frac{x^4}{20} - \frac{7x^3}{10} + \frac{51x^2}{20} - \frac{7x}{10} + 1.$$

Behelyettesítve:

$$\int_0^{10}\left(\frac{x^4}{20}-\frac{7x^3}{10}+\frac{51x^2}{20}-\frac{7x}{10}+1\right)dx=\int_0^{10}(mx+b)\,dx,$$

$$\left[\frac{x^5}{100}-\frac{7x^4}{40}+\frac{17x^3}{20}-\frac{7x^2}{20}+x\right]_0^{10}=\left[m\frac{x^2}{2}+bx\right]_0^{10}.$$

(1) $$75=50m+10b.$$

Mivel az e egyenes áthalad a $(2;5)$ ponton, azért

(2) $$e(2)=2m+b=5.$$

Az (1) és (2)-ből $m=\dfrac{5}{6}$ és $b=\dfrac{10}{3}$, azaz a keresett egyenes:

$$e(x)=\frac{5}{6}x+\frac{10}{3}.$$

8. *Egy társaságból k embert p-féleképpen, $(k+1)$-et $2p$-féleképpen, $(k+2)$-t $3p$-féleképpen tudunk kiválasztani. Hány fős a társaság?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a társaság n fős. Ekkor k embert p-féleképpen tudunk kiválasztani, azaz

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=p,\quad\text{továbbá}\quad\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=2p$$

és

$$\binom{n}{k+2}=\frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}=3p.$$

Az első két egyenletből:

$$\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{k+1}{n-k}=\frac{1}{2},\quad\text{azaz}\quad 3k+2=n.$$

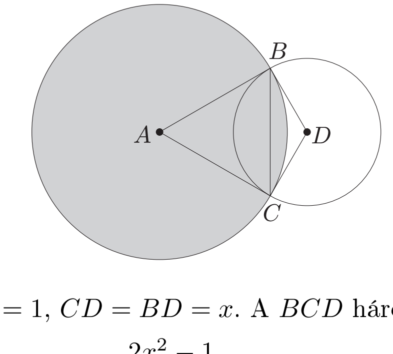
A második és a harmadik egyenletből:

$$\frac{(k+2)!(n-k-2)!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{k+2}{n-k-1}=\frac{2}{3},\quad\text{azaz}\quad \frac{5k+8}{2}=n.$$

A két egyenletből: $3k+2=\dfrac{5k+8}{2}$, amiből $k=4$ és $n=14$.

Azaz a társaság 14 fős.

9. *A Holdkorongra éppen úgy vetül a Föld árnyéka, hogy a Holdkorong középpontjából 120°-os, a Föld árnyékának középpontjából 60°-os szögben látszik a két kör közös húrja. Hányadrésze nem látható a Hold korongjának?* (*16 pont*)



Megoldás. Legyen $AB=BC=CA=1$, $CD=BD=x$. A BCD háromszögben a koszinusztételből

$$\cos CDB=\frac{2x^2-1}{2x^2}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},$$

ahonnan $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, így a két körlap területe π és $\dfrac{\pi}{3}$, az ABC körcikk területe $\dfrac{\pi}{6}$, a DBC körcikké $\dfrac{\pi}{9}$. Az ABC körcikk területéből kivonva az ABC háromszög területét: $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, a DBC körcikkből a DBC háromszögét: $\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{1}{2\sqrt{12}}$, a két eredmény összege a közös rész területe: $\dfrac{5\pi}{18}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. A keresett arány:

$$\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\approx 0{,}28.$$