Pierre de Fermat 1643-ban tett feljegyzései között található a következő feladat: *Adott három pont a síkon. Keressük azt a pontot, melynek távolságösszege e háromhoz minimális.* Annak ellenére, hogy Fermat találta ki ezt az egyszerűnek tűnő feladatot, ő maga nem adott rá megoldást, nem foglalkozott sokat vele. Azonban ahhoz, hogy ez a geometriai probléma egész problémakörré növekedjen, Fermat megtette az első lépést: a XVII. századi tudományos élet szokásai szerint útjára bocsátotta, vagyis levélben elküldte egyik kortársának, a híres *Mersenne*-nek. A feladat aztán Mersenne közvetítésével eljutott *Torricellihez, Vivianihoz* Firenzébe és *Cavalierihez* Bolognába. Ők voltak az elsők, akik megoldásokat adtak a feladatra. Később aztán sokan foglalkoztak a problémával, annak általánosításával és mechanikai vonatkozásaival. A neves és tekintélyes *Steiner* is írt vázlatokat ezzel kapcsolatban. (Szokás ezt a feladatot *Steiner* feladatának is nevezni.) Az alábbiakban a viszonylag terjedelmes problémakörből szeretnék ízelítőt adni.

A feladatban keresett pontot a továbbiakban $P_{\min}$-nek vagy a három adott pont *Fermat–Torricelli pontjának* fogom nevezni. Az első megoldás Torricelli nevéhez fűződik, melynek kiegészített változatát úgy nevezik, hogy

Torricelli tétele

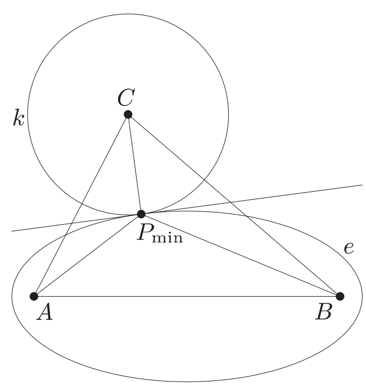
1. eset: *Ha az A, B, C pontok által meghatározott háromszög minden szöge $< 120°$, akkor a $P_{\min}$ a háromszög izogonális pontja (P_{iz}), vagyis amely pontból a háromszög minden oldala egyenlő szögben látszik.*

2. eset: *Ha az A, B, C pontok által meghatározott háromszögnek van egy $120°$-nál nagyobb vagy azzal egyenlő szöge, akkor $P_{\min}$ ennek a szögnek a csúcsa.*

Meg kell említeni, hogy Torricelli pusztán az 1. esettel foglalkozott. Tekintve, hogy a 2. eset *Cavalierinél* fordult elő először, ezt *Cavalieri változatának* is szokták nevezni. Az első eset másik elnevezése: *lebegő eset,* a másodiké pedig: *kötött eset.* (Ez a $P_{\min}$-nek az A, B, C pontokhoz viszonyított elhelyezkedését szemlélteti.)

Az itt következő bizonyítások első csoportja nem foglalkozik a Fermat–Torricelli pont *létezésének* igazolásával.

Az 1. eset bizonyítása: A bizonyítás elején feltesszük, hogy egyértelműen létezik ez a $P_{\min}$ pont. Tekintsük azt az e ellipszist, amelynek fókuszpontjai A és B, és illeszkedik a $P_{\min}$ pontra, továbbá azt a k kört, amelynek középpontja a C pont és illeszkedik a $P_{\min}$ pontra (*1. ábra*).

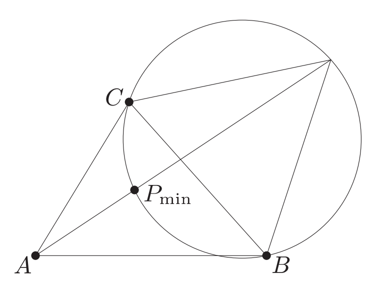


1. ábra

A $P_{\min}$ pont a k és az e érintési pontja kell legyen. Ugyanis, tegyük fel indirekt, hogy a $P_{\min}$ a két alakzat (egyik) metszéspontja. Ekkor a $P_{\min}$ ponttal a k körön az ellipszis egy belső pontjába (P'-be) mozdulva azt kapnánk, hogy: $AP_{\min} + BP_{\min} > AP' + BP'$, míg $CP_{\min} = CP'$. (Ugyanez a helyzet állna elő, ha az ellipszisen mozognánk a kör belseje felé.) Ez ellentmondás.

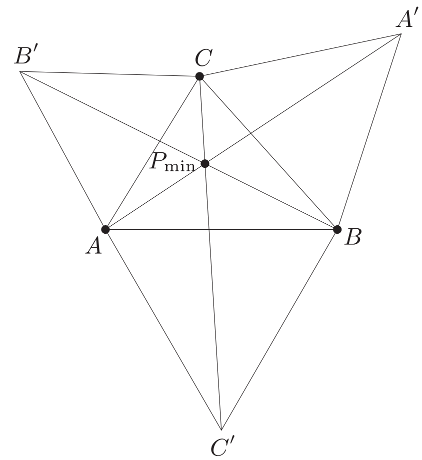
Az érintési pontban meghúzva a két alakzat közös érintőjét adódik, hogy $AP_{\min}C\sphericalangle = BP_{\min}C\sphericalangle$, mivel, az ellipszis fokális tulajdonságának értelmében, az érintő felezi az adott pontba húzott rádiuszvektorok szögét, és a k kör érintője merőleges az adott pontba húzott sugárra. De, ha nem a C, hanem a B vagy az A pont körül rajzoljuk a kört, akkor másik két szög egyenlőségét kapjuk meg. Tehát: $AP_{\min}C\sphericalangle = BP_{\min}C\sphericalangle = AP_{\min}B\sphericalangle$. $\square$

Torricelli és Cavalieri e tétel alapján mindjárt adott egy eljárást a $P_{\min}$ pont megszerkesztésére a lebegő esetre. $P_{\min}$ az ABC háromszög oldalai fölé kifele rajzolt egyenlő oldalú háromszögek körülírt köreinek közös metszéspontja (*2. ábra*).



2. ábra

Hasonló szerkesztési módszert adott *Simpson:* Ha az ABC háromszög oldalai fölé kifelé egyenlő oldalú háromszögeket emelünk, akkor – az „új” pontokat A', B', C'-vel jelölve – a $P_{\min}$ pont az AA', BB', CC' szakaszok metszéspontja (*3. ábra*).



3. ábra

Továbbá

$$AA' = BB' = CC' = AP_{\min} + BP_{\min} + CP_{\min}.$$

A körülírt körök segítségével való szerkesztést Viviani is ismerte, de adott egy olyan eljárást is, amely ennek és Simpson szerkesztésének az összekapcsolásaként is felfogható.

Viviani nevéhez fűződik az alábbi tétel általánosabb változata.

Viviani tétele az egyenlő oldalú háromszögekre

Ha egy szabályos ABC háromszög egy tetszőleges belső P pontjából merőlegeseket állítunk az oldalakra, akkor a $PT_1 + PT_2 + PT_3$ összeg állandó és egyenlő az ABC háromszög magassainak hosszával, ahol T_1, T_2, T_3 a P pontból az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai.

Bizonyítás.

$$\begin{gathered} T_{ABC\triangle} = AB \cdot m = T_{ABP\triangle} + T_{BCP\triangle} + T_{APC\triangle} = \\ = AB \cdot PT_1 + BC \cdot PT_2 + AC \cdot PT_3 = AB \cdot (PT_1 + PT_2 + PT_3). \quad \square \end{gathered}$$

Úgy is szokták fogalmazni ezt a tételt, hogy az egyenlő oldalú háromszög rendelkezik a *Viviani–Steiner tulajdonsággal.*

Viviani első bizonyítása Torricelli tételére

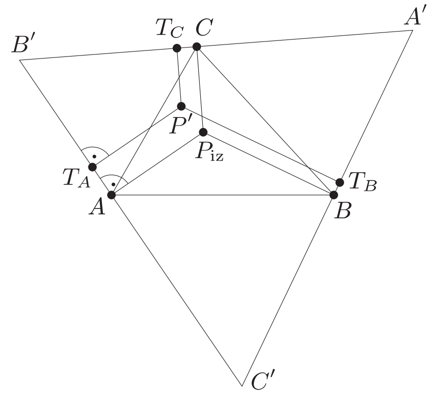
Viviani is csak az első esetet bizonyította, indirekt úton: Tegyük fel, hogy nem az izogonális pont a $P_{\min}$, hanem valamely másik P' belső pont, vagyis $\exists\, P' \in ABC\triangle$, $P' \neq P_{\text{iz}}$, amelyre

$$\begin{gathered} P_{\text{iz}}A + P_{\text{iz}}B + P_{\text{iz}}C \geq \\ \geq P'A + P'B + P'C, \end{gathered}$$

ahol P_{iz} az ABC háromszög izogonális pontja (*4. ábra*). Tekintsük azt az egyenlő oldalú $A'B'C'$ háromszöget, amelynek oldalai rendre merőlegesek az AP_{iz}, BP_{iz}, CP_{iz} szakaszokra. Legyenek továbbá a T_A, T_B, T_C pontok a P' pontból az $A'B'C'$ háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai. Ekkor Viviani tétele alapján felírhatjuk, hogy

$$P_{\text{iz}}A + P_{\text{iz}}B + P_{\text{iz}}C = P'T_A + P'T_B + P'T_C < P'A + P'B + P'C.$$

Vagyis ellentmondásra jutottunk. $\square$



4. ábra

Viviani nevéhez kapcsolható egy másik bizonyítás is, amely az alábbi lemma alapján könnyen befejezhető.

A Viviani-lemma

Tekintsük az $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ponthalmazt, és azt a $P_{\min}$ pontot, amelyre a $\sum_{j=1}^{n} P_jP$ minimális, ha $P = P_{\min}$, továbbá az $S' = \{P'_1, P'_2, \ldots, P'_n\}$ ponthalmazt és a $P'_{\min}$ pontot, amelyre $\sum_{j=1}^{n} P'_jP$ minimális, ha $P = P'_{\min}$. Ha (minden j-re) P'_j a $P_{\min}P_j$ szakasz pontja, akkor $P'_{\min} = P_{\min}$, vagyis az S és az S' ponthalmaznak ugyanaz a Fermat–Torricelli pontja.

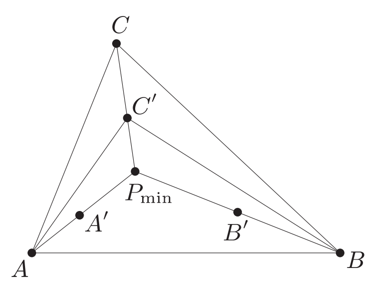
Bizonyítás ($n = 3$ pontra). P_1, P_2, P_3 helyett A, B, C-vel fogom jelölni a pontokat. Nézzük tehát az ABC háromszöget, amelynek $P_{\min}$ a Fermat–Torricelli-pontja. Legyen $A' \in P_{\min}A$, $B' \in P_{\min}B$, $C' \in P_{\min}C$ (*5. ábra*). Tegyük fel először, hogy az ABC' háromszögnek nem a $P_{\min}$ a Fermat–Torricelli-pontja, vagyis $\exists\, P' \in ABC'\triangle$, amelyre:

$$P_{\min}A + P_{\min}B + P_{\min}C' > P'A + P'B + P'C'.$$

Másrészt a P' pontra (is) tudjuk, hogy

$$P'A + P'B + P'C > P_{\min}A + P_{\min}B + P_{\min}C,$$

hiszen $P_{\min}$ az ABC háromszög Fermat–Torricelli-pontja.



5. ábra

A két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk:

$$P_{\min}A + P_{\min}B + P_{\min}C' + P'A + P'B + P'C >$$
$$> P'A + P'B + P'C' + P_{\min}A + P_{\min}B + P_{\min}C.$$

Rendezve:

$$P_{\min}C' + P'C > P'C' + P_{\min}C.$$

Tekintve, hogy $C' \in P_{\min}C$ szakasz:

$$P_{\min}C = P_{\min}C' + CC',$$

ezért:

$$P_{\min}C' + P'C > P'C' + P_{\min}C' + CC'.$$

Tovább egyszerűsítve:

$$P'C > P'C' + CC'.$$

Ez azonban ellentmond a háromszög-egyenlőtlenségnek. Igazoltuk tehát, hogy az ABC' háromszögnek ugyanaz a Fermat–Torricelli pontja, mint az ABC háromszögnek. Ugyanígy igazolhatjuk, hogy az ABC háromszögnek ugyanaz a Fermat–Torricelli pontja, mint az $AB'C'$ háromszögnek és az $A'B'C'$ háromszögnek.

A bizonyítás szó szerint ugyanígy működik három helyett tetszőleges számú pontra, feltéve, hogy mindegyik ponthalmaznak egyértelműen létezik Fermat–Torricelli-pontja.

Ezzel a lemmával igazolható Torricelli tételének első esete.

A Torricelli-tétel első esetének bizonyítása a Viviani-lemma segítségével

Tekintsük az ABC háromszöget. Szerkesszünk egy egyenlő oldalú $A'B'C'$ háromszöget úgy, hogy az tartalmazza az ABC háromszöget és izogonális pontjaik egybeessenek. Az ABC háromszögnek belső pontja lesz az egyenlő oldalú háromszög izogonális pontja, amely egyben (a létezés egyértelműsége és a szimmetria miatt) az $A'B'C'$ háromszög Fermat–Torricelli pontja is. Ezek után alkalmazzuk a Viviani-lemmát az ABC és az $A'B'C'$ háromszögre. $\square$

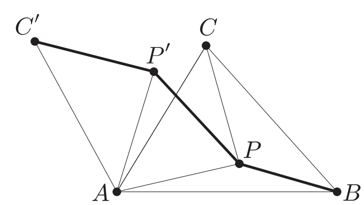
Tovább folytatva az első eset bizonyításainak sorát elérkezünk a sokak által legelegánsabbnak tartott bizonyításhoz, mely *J. E. Hofmann* nevéhez fűződik.[1]

Egy forgatásos bizonyítás Torricelli tételének első esetére

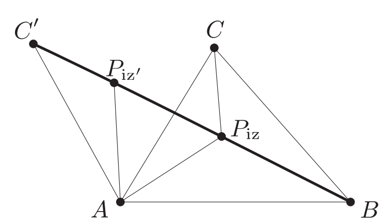
Tekintsünk egy ABC háromszöget, amelynek minden szöge kisebb $120°$-nál és benne egy tetszőleges P pontot. Forgassuk el $+60°$-kal az A pont körül az APC háromszöget. Így a P pont képe a P' pont lesz, a C pont képe pedig a C' (*6. ábra*). A forgatás távolságtartását felhasználva kapjuk, hogy $P'C' = PC$, illetve $AP = PP'$, hiszen az APP' háromszög egyenlő szárú és a szárak által bezárt szöge $60°$, tehát egyenlő oldalú is. Ezekből következően:

$$PA + PB + PC = PB + PP' + P'C'.$$

Tehát az összeg, amelyet minimalizálni szeretnénk, megegyezik a $BPP'C'$ töröttvonal hosszával. Ez nyilván pontosan akkor minimális, ha egybeesik a BC' szakasszal, mert a két végpontja (B és C') P helyétől függetlenül mindig ugyanott van. Ebből következően a $P_{\min}$ pontnak és az elforgatott képének, a $P'_{\min}$ pontnak is a BC' szakaszon kell lennie (*7. ábra*). Tehát az $AP_{\min}B\sphericalangle = 120°$ (ez a szög az $AP_{\min}P'_{\min}$ egyenlő oldalú háromszög egyik külső szöge.) Másrészt $P_{\min}$ rajta van az ACC' háromszög körülírt körén – hiszen az $AP_{\min}C'\sphericalangle = ACC'\sphericalangle$, így mindkét szög csúcsa az AC' szakaszhoz tartozó $60°$-os látószögköríven van, amely az ACC' háromszög körülírt köre – tehát az $AP_{\min}C = 120°$. Ebből adódóan a $BP_{\min}C\sphericalangle = 120°$.



6. ábra



7. ábra

Megjegyzés: 1. Arra is hivatkozhattunk volna a kis háromszög elforgatása után, hogy a $P_{\min}$ pont az egyik Simpson egyenesre esik. Persze mindegy, hogy melyik csúcsot választjuk ki a forgatáshoz, ezért mindhárom csúcsra és mindhárom kis háromszögre hasonló eredményt kapunk. Vagyis a $P_{\min}$ a Simpson egyenesek metszéspontja.

2. Ez a bizonyítás – az eddigiekkel szemben – azt is megmutatta hogy a $P_{\min}$ pont létezik és egyértelmű.

A fenti bizonyításokkal alaposan körüljártuk Torricelli tételének első esetét, lássuk, hogy hogyan igazolható a második eset.

[1] A bizonyítást először 1929-ben *J. E. Hofmann* közölte, de *Gallai* is ugyanerre az eredményre jutott, tőle függetlenül.

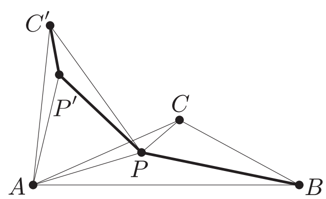
Egy forgatásos bizonyítás Torricelli tételének második esetére

Nem tudtam kideríteni, hogy ez a bizonyítás kinek a nevéhez fűződik, annyi azonban bizonyos, hogy a *Skljavszkij–Csencov–Jaglom* szerzőhármas könyvében bukkantam rá. Hofmann nem foglalkozott ezzel az esettel, annak ellenére, hogy a bizonyítás szinte lépésről lépésre ugyanúgy működik, mint az övé:

Tekintsük az ABC háromszöget, melynek egyik szöge, pl. $\gamma \geq 120°$, illetve az ABC háromszög egy tetszőleges belső pontját, P-t. Válasszuk ki az ABC háromszög egyik olyan csúcsát, amelynél 120°-nál kisebb szög van, pl. az A-t. Ha e pont körül elforgatjuk az APC háromszöget +60°-kal, akkor az $AP'C'$ háromszöget kapjuk (*8. ábra*). A forgatás (előbb részletezett) tulajdonságai alapján azt kapjuk, hogy

$$AP + BP + CP = BP + PP' + P'C'.$$

Ez a $BPP'C'$ töröttvonal hossza. P választásától függően csak a P és a P' pontok mozdulhatnak el, P viszont belső pont, tehát nem lehet az ABC háromszögön kívül. Így, a feltételeknek megfelelő B-t C'-vel összekötő töröttvonalak közül a BCC' lesz a legrövidebb. Ez pontosan akkor valósul meg, ha $P = C$. $\square$



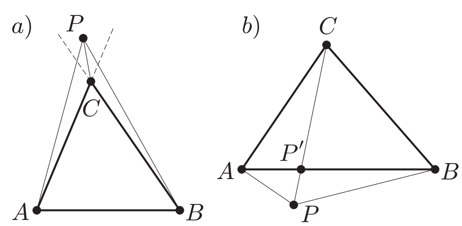
8. ábra

Megjegyzés. A *Skljavszkij–Csencov–Jaglom* szerzőhármas könyvében található indoklás arra is, hogy külső pont miért nem lehet Fermat–Torricelli pontja egy adott ABC háromszögnek. (Ez nyilván a könyv kérdésfeltevéséből is fakad, mert a feladat ott nem zárja ki a lehetséges megoldások közül a külső pontokat, míg sok korábbi szerző csak a belső vagy határpontokra szorítkozott a lehetséges megoldásokat illetően. Bár Fermat eredeti kérdése nem is háromszögre, hanem három pontra vonatkozott.) Lássuk a külső pontokat is! Vegyünk egy tetszőleges ABC háromszöget és egy tetszőleges külső pontját, P-t.

a) Ha P beleesik az ABC háromszög valamelyik csúcsszögtartományába (pl. γ-éba), akkor az

$$AP + BP + CP > AC + BC$$

teljesül (*9. ábra*).



9. ábra

b) Ha P egyik csúcsszögtartományba sem esik bele, akkor (mondjuk) a CP szakasz elmetszi az AB oldalt, tehát a $P' = CP \cap AB$-re igaz, hogy

$$AP + BP + CP > AP' + BP' + CP'.$$

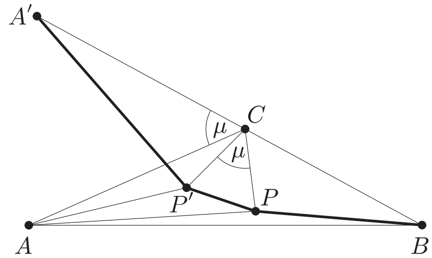
Különös, hogy a második esetre egy másik, szintén forgatásos bizonyítás is van.

Sokolowsky (forgatásos) bizonyítása Torricelli tételének második esetére

Tekintsük az ABC háromszöget, melynek valamelyik szöge (pl. γ) $\geq 120°$. Forgassuk el a CPA háromszöget a C pont körül μ szöggel úgy, hogy az A', a C és a B pontok egy egyenesre essenek. $\gamma \geq 120°$, ezért $\mu \leq 60°$ és $CP \geq PP'$ (*10. ábra*). Ezt és a forgatás tulajdonságait kihasználva állíthatjuk, hogy

$$AP + BP + CP \geq BP + PP' + P'A'.$$

A $BPP'A'$ töröttvonal hossza akkor a legkisebb, ha a töröttvonal egybeesik a BA' szakasszal, vagyis – P helyzetét vizsgálva – ha $P = C$.



10. ábra

Dörrie A diadalmas matematika című könyvében található egy bizonyítás Torricelli tételének második esetére.

Dörrie bizonyítása Torricelli tételének második esetére

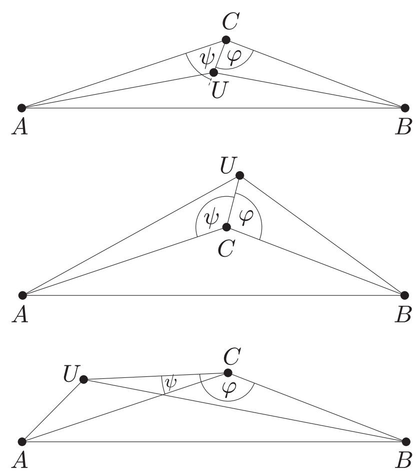
Tekintsük az ABC háromszöget, melynek a C csúcsnál lévő szöge legyen $\gamma \geq 120^\circ$ és egy tetszőleges U pontot a síkon.

Az alábbi módon igazolható, hogy

$$AC + BC < AU + BU + CU.$$

Tekintsük az $ACU = \psi$ és a $BCU = \varphi$ szögeket. Az U pont eshet 1) az $ACB = \gamma$ szög szárai közé, 2) γ csúcsszögének szárai közé, vagy 3) γ mellékszögének szárai közé. Ettől függően a következő összefüggések állapíthatók meg (*11. ábra*):

1) $\psi + \varphi = \gamma$,
2) $\psi + \varphi = 360^\circ - \gamma$, vagy
3) $\varphi - \psi = \gamma$.



11. ábra

Legyenek F és G az U pontból AC-re és BC-re bocsátott merőlegesek talppontjai. Akkor ezeknek a távolsága C-től:

$$FU = x = CU \cos \psi$$

és

$$GU = y = CU \cos \varphi,$$

ahol egy ilyen távolság, mondjuk x, pozitív vagy negatív aszerint, hogy $\cos \psi$ pozitív vagy negatív. Tehát mindegyik esetben:

$$AC = AF + x$$

és

$$BC = BG + x,$$

ezért:

$$AC + BC = AF + BG + x + y.$$

Ebből következően:

$$x + y = CU \cos\psi + CU \cos\varphi =$$
$$= CU(\cos\psi + \cos\varphi) = 2 \cdot CU \cdot \cos\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}.$$

Mivel a fentiek szerint ezen egyenlet jobb oldalán álló két cosinus közül az egyiknek az abszolút értéke $\cos\frac{\gamma}{2}$, ez azonban ($\frac{\gamma}{2} \geq 60°$ folytán) kisebb, mint $\frac{1}{2}$, a jobb oldal abszolút értéke legfeljebb CU. Következésképpen:

$$AC + BC \leq AF + BG + CU.$$

Mivel továbbá az AUF és BUG derékszögű háromszögek, melyeknek AF és BG befogói kisebbek, mint az AU és BU átfogók, azért

$$AC + BC < AU + BU + CU. \quad \square$$

Irodalom

[1] Heinrich Dörrie: *A diadalmas matematika* (Gondolat, Budapest, 1965.)

[2] Y. S. Kupitz – H. Martini: *Geometric Aspects of the Generalized Fermat–Torricelli Problem* (in: Intuitive Geometry – Bolyai Society Mathematical Studies, **6**., Budapest, 1997, 55–127. old.)

[3] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1987.)

[4] D. O. Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből II. rész, 2. kötet: Geometriai szélsőértékfeladatok* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.)

[5] Daniel Sokolowsky: *A note on the Fermat–Torricelli problem* (in: American Mathematical Monthly, **83** (1976), 276. old.)

[6] J. E. Hofmann: *Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe,* Zeitschr. Math.-Naturwiss Unterr., **60** (1929), 22–23.