Vannak olyan geometriai optikai feladatok – ilyen a 2007. évi Eötvös-verseny harmadik feladata is – melyeket bizonyos ismeretek birtokában úgy is megoldhatunk, hogy egyetlen fénysugarat sem rajzolunk. A sokszor oly hasznos – bár néha átláthatatlanul bonyolult – rajzok, szerkesztések mellőzését a *mátrixoptika* módszerének köszönhetjük, mely nem más, mint a fény terjedésének algebrai úton történő leírása. Mindenekelőtt tekintsük át a szükséges matematikai hátteret, majd nézzük meg általánosságban, hogy mi is az a mátrixoptika, végül oldjuk meg az idei Eötvös-verseny feladatát ezzel a módszerrel!

Mik is azok a mátrixok?

Az alábbiakban szorítkozzunk a kétdimenziós térre, mivel a vizsgált fizikai probléma síkbeli problémára egyszerűsíthető! Vegyünk egy derékszögű koordinátarendszert, x és y tengelyekkel! Egy $\mathbf{v}$ vektort a (v_1, v_2) rendezett számpárral adunk meg, ahol v_1 és v_2 a vektor komponensei. A vektort felírhatjuk oszlopvektorként is: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, az alábbiakban ezt a jelölésmódot használjuk. 2×2-es mátrixon egy két sorból és két oszlopból álló számtáblázatot értünk, amit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alakban adunk meg. Az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{v}$ vektor szorzata az

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v} \tag{1}$$

vektor, melynek komponensei a $\mathbf{v}$ vektor komponenseinek és az $\mathbf{A}$ mátrix elemeinek segítségével a következőképpen adhatók meg:

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2, \tag{2}$$

$$u_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2. \tag{3}$$

Ha egy $\mathbf{v}$ vektort először az $\mathbf{A}$, majd az így kapott vektort a $\mathbf{B}$ mátrixszal szorozzuk, az eredményt úgy is megkaphatjuk, hogy egyetlen $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ ($\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}$ mátrix szorzata) mátrixszal szorozzuk a $\mathbf{v}$ vektort, azaz

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{BA})\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{v}. \tag{4}$$

Ez a $\mathbf{C}$ szintén 2×2-es mátrix, elemei a következő módon határozhatók meg az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix elemeinek a segítségével:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

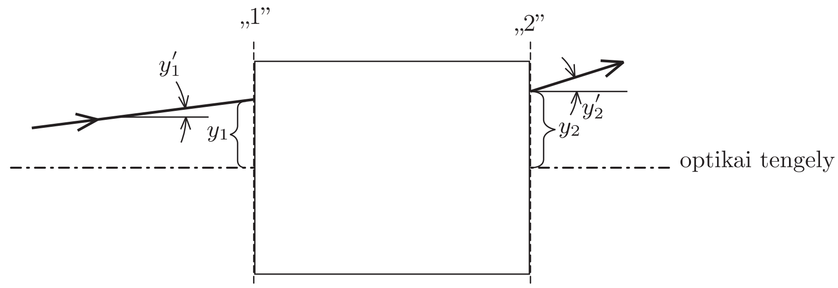
Tetszőleges számú 2×2-es mátrix szorzata is 2×2-es mátrix.

A mátrixoptikáról

Tekintsünk egy lencsékből és tükrökből álló optikai rendszert, melynek elemei úgy vannak elhelyezve, hogy a rendszeren áthaladó tetszőleges fénysugár pályája nem változik (invariáns) az elemeknek egy képzeletbeli közös tengely (optikai tengely) körüli elforgatására. Ha a rendszerre eső fénysugár irányvektora és az optikai tengely egy síkban van, akkor a fénysugár a rendszeren való áthaladás során mindvégig abban a síkban is marad. Koordináta-rendszerünk x tengelyét vegyük fel az optikai tengelyen, az y tengelyt pedig irányítsuk úgy, hogy fény terjedése az xy síkban történjen! Mivel a fénysugár az optikai tengelyre merőleges síkot általában egy ponton döfi át, ezért jellemezhetjük itt a fénysugarat az alábbi számpárral: e döféspont y koordinátájával és a fénysugár itteni y' meredekségével, azaz vektorba rendezve az $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$-vel. Ahogy az eddigi optika tanulmányok során tettük, (noha nem mindig hangsúlyoztuk kellőképpen) az alábbiakban is az optikai tengelyhez közeli, azzal kis szöget bezáró (paraxiális) sugarakkal dolgozunk. Az alapcélunk az, hogy ha ismert egy optikai elrendezés geometriája, és ismert a bemeneti síkban a fénysugár optikai tengelytől mért távolsága, illetve meredeksége, akkor ezen jellemzőket megtudhassuk bárhol a rendszerben, azaz ismertté váljon a fénysugár pályája. A mátrixoptika alapja, hogy paraxiális közelítésben egy hagyományos optikai elemekből (lencsék, tükrök, homogén közeg) álló rendszer transzformációja a következő módon írható le:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}, \tag{6}$$

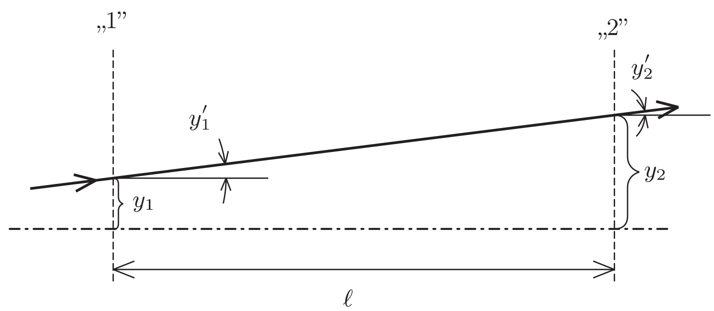
ahol az „1” a bemeneti, a „2” a kimeneti sík, $\mathbf{T}$ pedig az optikai mátrix (*1. ábra*).



1. ábra. Egy tetszőleges optikai rendszer a bemenő és a rendszert elhagyó fénysugárral

Két optikai rendszer akkor tekinthető ekvivalensnek, ha tetszőleges beeső fénysugárral ugyanazt a transzformációt hajtja végre, azaz a két rendszer optikai mátrixa azonos. Nézzük meg néhány elemi rendszer optikai mátrixát!

Homogén közeg



2. ábra. Fény terjedése homogén közegben

Homogén közegben a fény egyenes vonalban terjed. Ennek megfelelően (*2. ábra*) az

$$y_1' = y_2', \tag{7}$$

illetve az

$$y_2 = y_1 + \ell y_1' \tag{8}$$

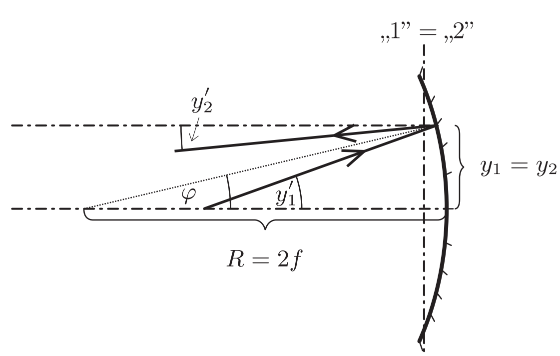
összefüggés érvényes, ami mátrix–vektor szorzással is felírható:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ha a (2) és (3) „szabályt” alkalmazzuk a (9) egyenletben, visszakapjuk (7)-et, illetve (8)-at. Az optikai tengely mentén ℓ hosszúságú homogén közeghez tartozó optikai mátrix tehát:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

A gömbtükör



3. ábra. Illusztráció a gömbtükör optikai mátrixának származtatásához

Egy tetszőleges fénysugár gömbtükörről való visszaverődését a *3. ábra* illusztrálja. Magától értetődő, hogy

$$y_2 = y_1. \tag{11}$$

A visszaverődési törvényt, illetve a $\varphi = \dfrac{y_1}{2f}$ paraxiális közelítést felhasználva

$$y_2' = -\frac{y_1}{f} + y_1' \tag{12}$$

adódik. A (11) és (12) összefüggések alapján az f fókusztávolságú gömbtükör optikai mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

amit a (2), (3) és (6) összefüggések alapján könnyen ellenőrizhetünk. (13)-ban $f > 0$ felel meg a homorú, $f < 0$ pedig a domború tükörnek. A végtelen nagy fókusztávolság (azaz végtelen nagy görbületi sugár) határátmenetben síktükörhöz jutunk, melynek mátrixa az egységmátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Egységmátrixnak hívjuk azt a mátrixot, amely minden vektort önmagába képez le. Ez összhangban van azzal, hogy a síktükör sem y-t, sem y'-t nem változtatja meg (az optikai tengely irányítását is megfordítja!).

A vékony lencse

A levezetést az Olvasóra bízva, fogadjuk el, hogy az f fókusztávolságú vékony lencse optikai mátrixa is

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

azzal a szokásos konvencióval, hogy $f > 0$ jelenti a gyűjtőlencsét, $f < 0$ pedig a szórólencsét.

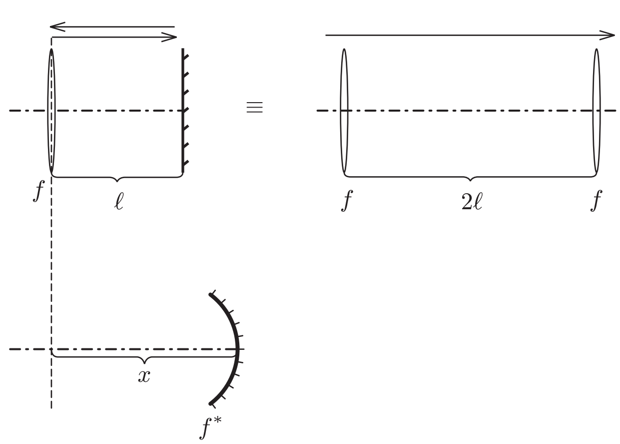
Ha optikai rendszerünk több részrendszerből áll, és a fénysugár rendre az „1”, „2”, …, „i”, …, „n” rendszereken halad keresztül, az eredő optikai mátrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_i \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \tag{16}$$

módon határozható meg.

A 2007. évi Eötvös-verseny 3. feladatának megoldása optikai mátrixokkal

A feladat (ld. a 174. oldalon) sok egymást segítő részfeladatból áll. Az az alapkérdés, hogy egy f fókusztávolságú vékony gyűjtőlencse, és egy attól ℓ távolságban lévő síktükör helyettesíthető-e egyetlen homorú tükörrel. Ha igen, akkor mekkora a tükör f^* fókusztávolsága, illetve mekkora x távolságra kell elhelyezni a tükröt a lencse eredeti helyétől.



4. ábra. A feladatban szereplő lencsés és a helyettesítő tükrös elrendezés

A *4. ábrán* látható a lencse-síktükör pár, tőle jobbra (segítségként) a vele ekvivalens kétlencsés séma, az ábra alsó részén pedig a helyettesítő gömbtükrös elrendezés. A lencsés elrendezés(ek)hez tartozó optikai mátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \equiv \tag{17}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2\ell}{f} & 2\ell \\ \dfrac{2}{f}\left(\dfrac{\ell}{f} - 1\right) & 1 - \dfrac{2\ell}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

ahol felhasználtuk a mátrixszorzásra vonatkozó (5) összefüggést. A (17)-ben mellőzött részletes számolást az Olvasóra bízzuk. A szférikus tükröt tartalmazó ekvivalens rendszer optikai mátrixa:

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{x}{f^*} & x\left(2 - \dfrac{x}{f^*}\right) \\ -\dfrac{1}{f^*} & 1 - \dfrac{x}{f^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}, \tag{18}$$

ahol szintén a összefüggést használtuk, a számolás részletezését most mellőzzük. A lencse-síktükör, és a gömbtükrös rendszer ekvivalens, ha $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$. Az $A = A^*$ $(D = D^*)$ feltételből következik, hogy:

$$x = \frac{2lf^*}{f}. \tag{19}$$

A $B = B^*$ feltételből a (19) összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$f^* = \frac{f^2}{2(f - \ell)}, \tag{20}$$

illetve

$$x = \frac{lf}{f - \ell} \tag{21}$$

a tükör f^* fókusztávolságára, illetve a lencse eredeti helyétől mért x távolságára. A $C = C^*$ feltétel nem ad új eredményt, azonosságra vezet.

Diszkusszió

Diszkutáljuk az eredményt! A (20) és (21) összefüggések nevezői kizárják az $f = \ell$ esetet, fizikailag ekkor a gömbtükör átmegy síktükörbe, hiszen az $|f - \ell| \to 0$ határátmenetben a gömbtükör fókusztávolsága $\pm\infty$-hez tart. Ha $f > \ell$, akkor $f^* > 0$-t, azaz homorú tükröt kapunk, melynek x-szel megadott helyére is pozitív szám adódik, azaz az előzetesen feltételezett irányba kell elhelyeznünk. Speciálisan, ha $\ell = 0$, akkor $f^* = \dfrac{f}{2}$ és $x = 0$ adódik.

Az $f < \ell$ esetben $f^* < 0$, azaz domború tükörrel tudjuk a lencsét helyettesíteni. Mivel ilyenkor $x < 0$ adódik, a helyettesítő tükröt a feltételezettel ellentétes irányban (a *4. ábrán* illusztrálttal ellentétben a lencsétől balra) kell elhelyeznünk. Végezetül megjegyezzük, hogy az optikai rendszereknél tisztában kell lenni azzal is, hogy mi az a térbeli tartomány, ahol a „helyettesítés” érvényes. A feladat szituációjában $f > \ell$ esetén (*4. ábra*) a lencsétől balra eső rész, $f < \ell$ esetén pedig a lencsétől balra, attól $|x|$-nél nagyobb távolságra eső tartomány az, ahová a leképezendő tárgyat helyezhetjük.