I. rész

1. *Összeöntöttünk* 5 kg 15 *tömegszázalékos,* 8 kg 20 *tömegszázalékos és* 12 kg 40 *tömegszázalékos cukoroldatot. Az oldószer mindegyik esetben víz volt. Azóta beleborult* 40 dkg *cukor, elpárolgott a víz* 12 *százaléka, és az egyensúly beállt.*

a) Hány százalékos az oldat most?

b) Hányadrészét kell vízzel helyettesíteni az oldatnak, ha 10 *tömegszázalékos oldatot szeretnénk kapni?* (*11 pont*)

Megoldás. *a*) Az összeöntés után keletkező 25 kg tömegű oldatban $5\cdot 0{,}15+8\cdot 0{,}2+12\cdot 0{,}4$, azaz 7,15 kg oldott anyag, és 17,85 kg oldószer van. A cukor beleömlésével az oldott anyag tömege 7,55 kg-ra, a víz elpárolgásával az oldószer tömege 15,708 kg-ra változott.

Az oldat tehát $\dfrac{7{,}55}{7{,}55+15{,}708}\cdot 100\approx 32{,}46$ tömegszázalékos.

b) $7{,}55+15{,}708=23{,}258$ kg tömegű oldatban 7,55 kg cukor van. Az kellene, hogy 2,3258 kg cukor legyen benne, mert a helyettesítés után az oldat mennyisége nem változik. Ezért $7{,}55-2{,}3258=5{,}2242$ kg cukrot ki kell venni belőle. Ezt a mennyiséget, egyenletes elkeveredést feltételezve megközelítőleg $\dfrac{5{,}2242\cdot 100}{32{,}46}\approx 16{,}094$ kg oldat tartalmazza. Ez a teljes oldat mennyiségének $\dfrac{16{,}094}{23{,}258}\approx 0{,}692$ része.

Vagyis az oldat kb. 0,692 részét kell vízzel helyettesíteni.

2. *A következő* táblázat *a földrészek lakosságának számát mutatja* 1995-*ben.*

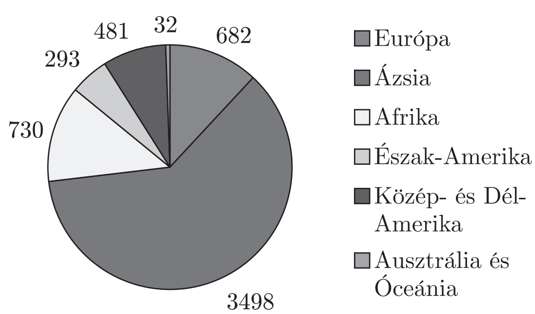
Földrész	**Lakosság (millió fő)**
Európa	682
Ázsia	3498
Afrika	730
Észak-Amerika	293
Közép- és Dél-Amerika	481
Ausztrália és Óceánia	32

a) Állapítsuk meg az adatsokaság átlagát, szórását.

b) Készítsünk diagramot a Föld lakosságának kontinensek szerinti eloszlásáról. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) A kontinensek átlagos lakossága: $952{,}\dot{6}$ millió fő, a szórás közelítőleg: 1162,4 millió.

b) Az eloszlást jól szemléltethetjük például kördiagrammal. A körcikkekhez tartozó középponti szögeket a táblázat mutatja. (Természetesen bármilyen jól elkészített diagramm megfelel a feladat kérésének.)



Földrész	**Középponti szög (fok)**
Európa	42,95
Ázsia	220,31
Afrika	45,98
Észak-Amerika	18,45
Közép- és Dél-Amerika	30,29
Ausztrália és Óceánia	2,02

3. *a*) *Tudjuk, hogy* p *és* $10p-1$ *pozitív prímszámok. Lehet-e prímszám a* $10p+1$?

b) *Péter és Pál mindketten nagyon okosak. Egy alkalommal Péter azt mondta Pálnak:*

– Az imént meglátogattak engem hárman. Az életkoruk összege néggyel több, mint a tiéd, az életkoruk szorzata a 35 négyzetének a duplája, és mindegyikük több, mint négyéves.

– Nem tudom a választ – közölte rövid gondolkodás után Pál.

– Az egyik látogatóm idősebb nálam – folytatta Péter a párbeszédet.

– Akkor tudom a választ – mondta Pál.

Mennyi Péter és Pál közt a korkülönbség? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $p = 3$, akkor $10p - 1 = 29$, ami prímszám és $10p + 1 = 31$, ami szintén prímszám.

Ha $p \neq 3$ és prím, akkor $10p - 1$, amiről tudjuk, hogy prím és minimum 19 nem lehet osztható 3-mal. Nyilván $10p$ sem osztható hárommal, ezért $10p + 1$ osztható hárommal (három egymást követő egész szám közül pontosan egy osztható hárommal). Mivel $10p + 1$ osztható hárommal és nagyobb, mint 19 ezért nem lehet prím.

Tehát a feladat feltételei mellett kizárólag a $p = 3$ esetén prímszám a $10p - 1$ és a $10p + 1$.

b) Pál kiszámolta, hogy 35 négyzetének a duplája 2450, ami $2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ alakban bontható fel prímtényezőkre, és a következő módokon bontható a feltételeknek megfelelő, háromtényezős szorzatokra:

Szorzótényezők			Szorzat	Összeg
5	5	98	2450	108
5	7	70	2450	82
5	**10**	**49**	**2450**	**64**
5	14	35	2450	54
7	**7**	**50**	**2450**	**64**
7	10	35	2450	52
7	14	25	2450	46

Mivel Pál ismeri a saját életkorát, ezért nyilván a vastagított két eset között nem tudott dönteni. Tehát Pál 60 éves. Mikor Péter azt mondta, hogy a látogatók egyike idősebb nála, és Pál ezután már tudott dönteni, ebből mi arra következtethetünk, hogy Péter 49 éves, hiszen ha ennél fiatalabb lenne, akkor Pál nem tudott volna dönteni, ha pedig idősebb lenne, akkor ellentmondásra jutnánk. Tehát Pál 11 évvel idősebb, mint Péter.

4. *a*) *Adott a síkon* 2007 *darab olyan pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesbe. Ezek közül három pont zöld. Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelyeket a* 2007 *pont meghatároz. Hány olyan van ezek között, amelynek van zöld csúcsa?*

b) *Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozat bármely két szomszédos tagja relatív prím.*

(A Fibonacci-sorozat képzési szabálya: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, minden $n > 2$ esetén.) (*14 pont*)

Megoldás. *b*) Olyan háromszög, amelynek nincs zöld csúcsa $\binom{2004}{3}$ darab van. Összesen $\binom{2007}{3}$ darab háromszöget határoznak meg a pontok. Ezekből adódóan $\binom{2007}{3} - \binom{2004}{3}$ darab olyan háromszög van, amelynek van zöld csúcsa.

a) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel állításunk ellenkezőjét, vagyis hogy a Fibonacci-sorozatnak van két olyan szomszédos tagja, melyek nem relatív prímek. Jelöljük őket a következőképpen: a_k és a_{k-1}. Feltevésünk alapján van olyan 1-nél nagyobb m egész szám, amelyre igaz, hogy $m \mid a_k$ és $m \mid a_{k-1}$. Ebből az oszthatóságra vonatkozó összefüggések alapján következik, hogy $m \mid (a_k - a_{k-1}) = a_{k-2}$. Hasonló gondolatmenettel igazoljuk, hogy $m \mid a_{k-1}$ és $m \mid a_{k-2}$ ismeretében $m \mid a_{k-3}$. Véges sok lépés után eljutunk oda, hogy $m \mid a_2 = 1$ is igazolást nyer. Ez pedig ellentmondás. Tehát az eredeti állítás igaz.

II. rész

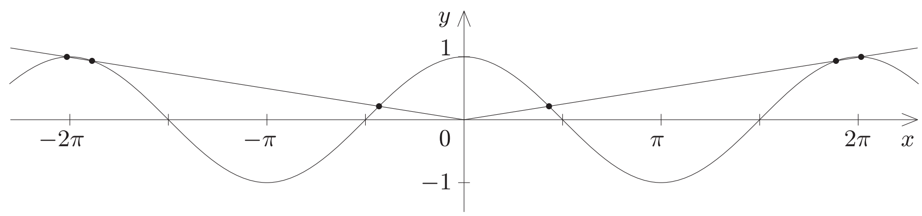
5. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet:* $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

b) *Hány megoldása van a* $\cos x = \dfrac{|x|}{2\pi}$ *egyenletnek?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Rendezzük az egyenletet a következő alakra: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -x^3$. Az $x = 0$ nem megoldás, ezért oszthatunk x^3-nal: $\dfrac{(x-1)^3}{x^3} = -1$. Azaz $\dfrac{x-1}{x} = -1$, amiből kapjuk, hogy $x = \dfrac{1}{2}$.

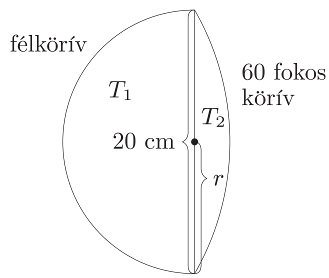
Ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

b) Az egyenlet két oldalán álló függvények közös koordináta-rendszerben történő ábrázolása után megállapíthatjuk, hogy az egyenletnek pontosan 6 db gyöke van.



$x = \pm 2\pi$ megoldása az egyenletnek és mivel ebben a két pontban a $\cos x$ érintőjének meredeksége 0, még 4 megoldásnak kell lennie. A $[-2\pi; 2\pi]$ intervallumon kívül további megoldás nincs.

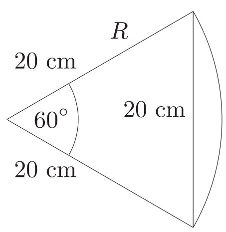
6. *Az ábrán fából készült kerítésoszlopok keresztmetszetét látjuk. A* 80 db *kerítésoszlop mindegyike* 3 *méter hosszú, és* 1 *méteres darabjuk lesz a földben. A kerítésoszlopoknak ezt a részét speciális folyadékkal itatják át, hogy tartósabbak legyenek.*



a) Mennyi folyadékra van szükség, ha 1 m^3 *faanyag* 2,5 liter *folyadékot „nyelt el”?*

b) Mennyi festékre van szükség a már felállított kerítésoszlopok festéséhez, ha a használt festékből 1 kg 4 m^2*-re elegendő?* (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk a vázlatrajzok jelöléseit.



a) A félkör területe: $T_1 = \dfrac{r^2\pi}{2} \approx 157{,}08$. A 60°-os középponti szögű körszelet területe:

$$T_2 = \frac{1}{6}R^2\pi - \frac{R^2 \sin 60^\circ}{2} \approx 36{,}23.$$

A metszetidom területe: $T = T_1 + T_2 = 193{,}31$.

Egy (földben lévő) kerítésláb magassága 1 m, térfogata: $V = T \cdot m = 193{,}31 \cdot 100 \approx 19\,331$ cm^3, azaz kb. 0,0193 m^3.

A szükséges folyadékmennyiség: $80 \cdot V \cdot 2{,}5 = 80 \cdot 0{,}0193 \cdot 2{,}5 = 3{,}9$. Azaz kb. 3,9 liter folyadék szükséges.

b) A félkör körívhossza: $k_1 = \dfrac{2r\pi}{2} \approx 31{,}42$. A körszelet körívhossza:

$$k_2 = \frac{1}{6} \cdot 2R\pi \approx 20{,}94.$$

A metszetidom kerülete: $k = k_1 + k_2 \approx 52{,}36$. A befestendő test magassága: $m' = 200$. A befestendő felszín:

$$A = 80 \cdot T + 80 \cdot k \cdot m' \approx 853\,225 \text{ cm}^2,$$

ami kb. 85,3 m^2.

A szükséges festékmennyiség: $\dfrac{A}{4} \approx 21{,}33$ kg.

7. *Hajótöröttek egy lakatlan, növényzet nélküli szigeten azt tervezik, hogy a viharban zátonyra futott eredeti vitorlás hajójuk darabjaiból új, kisebb hajót építenek. A vihar az árbocot véletlenszerűen három darabra törte. Ha az eredeti* 40 m *hosszú árbocnak maradt egy legalább* 20 m*-es darabja, akkor a hajó megépíthető. Mi a valószínűsége annak, hogy amikor visszaúsznak a hajóroncshoz, találnak ilyen darabot?* (*16 pont*)

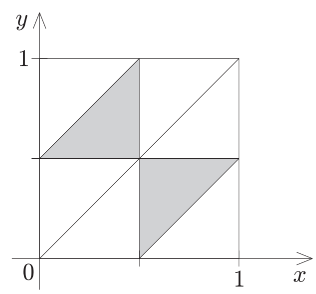
Megoldás. A feladat lényegében a következő: Ha az egységszakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot, melyek három részre osztják az egységszakaszt, akkor mi a valószínűsége annak, hogy keletkezik egy legalább $\frac{1}{2}$ hosszúságú szakasz. A törési helyek kiválasztását ezek szerint úgy tesszük meg, hogy a 40 métert egységnek, a 20 métert pedig $\frac{1}{2}$-nek tekintve, a koordinátasík egységnégyzetének $(x; y)$ koordinátájú pontját választjuk ki véletlenszerűen. A probléma komplementerének valószínűségét fogjuk meghatározni, nevezetesen: Ha az egységszakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot, melyek három részre osztják az egységszakaszt, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a keletkezett szakaszok egyike sem hosszabb $\frac{1}{2}$-nél.

Két esetet különböztetünk meg:

I. $x < y$. Ekkor egyszerre a következő feltételeknek kell teljesülni: $x < \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$, azaz $y < x + \frac{1}{2}$, továbbá $1 - y < \frac{1}{2}$, azaz $y > \frac{1}{2}$.

II. $x > y$. Ekkor egyszerre a következő feltételeknek kell teljesülni: $y < \frac{1}{2}$, $x - y < \frac{1}{2}$, azaz $y > x - \frac{1}{2}$, továbbá $1 - x < \frac{1}{2}$, azaz $x > \frac{1}{2}$.

A feltételeket teljesítő pontokat ábrázolva látszik, hogy a keresett valószínűség: $p' = 0{,}25$.



Visszatérve az eredeti feladatra: $p = 1 - p' = 0{,}75$ annak a valószínűsége, hogy a hajótöröttek találnak nekik megfelelő darabot.

8. *Egy vállalattól* 100 db *henger alakú,* 1 m^3 *belső térfogatú, speciális fémlemezből kialakított zárt tartályt rendeltek. A megrendelő csak a térfogatot és az alakot határozta meg. Mekkora legyen a henger magassága, ha a vállalat a lehető legkevesebb anyagot szeretné felhasználni?* (*16 pont*)

Megoldás. Keressük, hogy az 1 m^3 térfogatú henger felszíne mekkora magasság mellett lesz minimális. A szokásos jelölést használva a térfogat: $V = r^2\pi m = 1$, amiből $r^2 = \frac{1}{\pi m}$. Ekkor a felszín:

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2\frac{1}{\pi m}\pi + 2\sqrt{\frac{1}{\pi m}} \cdot \pi m = \frac{2}{m} + 2\sqrt{\pi m}.$$

Vagyis az $A(m) = \frac{2}{m} + 2\sqrt{\pi m}$ minimumát keressük.

Meghatározzuk a derivált zérushelyét:

$$A'(m) = -2m^{-2} + \sqrt{\pi} \cdot m^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \text{vagyis} \quad \sqrt{\pi} \cdot m^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{m^2}.$$

Ebből kapjuk, hogy

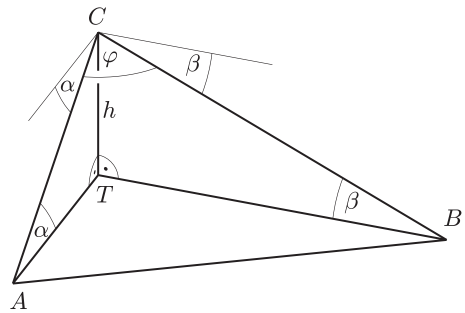
$$\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{m}^3 = 2, \quad \text{azaz} \quad m = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}08.$$

Mivel a függvény második deriváltja ezen a helyen pozitív, azért $m = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ esetén a felszínnek minimuma van.

Vagyis a henger magassága kb. 1,08 m.

9. *A tengerpart mentén sík terepen állomásozó saját tüzérségét, és az ugyancsak a tengerpart menti sík terepen található ellenséges gyalogos hadtest helyzetét vizsgálja a hadvezér egy* 480 m *magas hegy tetejéről. A két hadtest látszólagos távolsága* $71{,}2°$. *A hadvezér a tüzérséget* $6°30'$, *a gyalogságot* $8°$ *depressziószög alatt látja. Kiadja-e a matematikához jól értő hadvezér a tűzparancsot, ha tudja, hogy tüzérsége ágyúinak maximális lőtávolsága* 4 km? (*16 pont*)

Megoldás. Elkészítjük a szöveg alapján a vázlatrajzot.



Az *ábra* szerint az A pontban van a gyalogság, B pontban van a tüzérség, és a C pontban tartózkodik a hadvezér. Az adatok: $\alpha = 8^\circ$, $\beta = 6^\circ 30'$, $\varphi = 71{,}2^\circ$, $h = 480$ m.

Szögfüggvények alkalmazásával:

$$AC = \frac{h}{\sin\alpha} \approx 3448{,}94;$$

$$BC = \frac{h}{\sin\beta} \approx 4240{,}16.$$

Alkalmazva a koszinusztételt: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\varphi$, ebből adódik, hogy $AB \approx 4522$ m.

Tehát a matematikához jól értő hadvezér nem fog tűzparancsot adni.