

1. feladat. Bonyolult jelenségek – egyszerű megoldások (20 pont)

1/A. Határsebesség (5 pont)

Az $m = 10^3$ kg tömegű űrállomás a csillagközi térben mozog. Egy $M = 10^{30}$ kg közepes tömegű csillag $v = 10^4$ m/s átlagos sebességgel véletlenszerűen mozog a térben. Határozd meg az űrállomás átlagos sebességét hosszú időtartam után!

Tételezd fel, hogy az űrállomást semmilyen kozmikus test nem fogja be, és nem esik rá egy csillagra sem.

1/B. Rák-köd (5 pont)

A Rák-köd néven ismert gázfelhő, melyet a Földről egy gyengébb minőségű távcsővel is megfigyelhetünk, egy valamikori szupernóva robbanásának következtében jött létre. Ezt a robbanást a Földön i. sz. 1054-ben figyelték meg.

A Rák-köd képein, mint a hátsó borítón látható felvételen is megfigyelhető, a gázfelhő egyes részei úgy fénylenek, mint egy „távolsági tűz”, amely vörös színű. Ez a sugárzás a magas hőmérsékletű hidrogén gáz fénykibocsátására jellemző.

A Rák-köd peremén található magas hőmérsékletű hidrogén által kibocsátott vörös sugárzás a Föld fele terjed, és a bolygónkon ezeknek a mért frekvenciája $4,586 \cdot 10^{14}$ Hz, míg a földi laboratóriumban, azonos körülmények között található hidrogén által kibocsátott vörös sugárzás frekvenciája $4,568 \cdot 10^{14}$ Hz.

a) Tételezd fel, hogy a Rák-köd peremének a Földön található detektorhoz képesti viszonylagos (relatív) sebessége u , mely teljesíti az $u \ll c$ ($c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s) feltételt, valamint azt, hogy a Rák-köd középpontjának sebessége a Földhöz képest elhanyagolható. Becsüld meg a Rák-köd külső peremének tágulási sebességét.

b) Becsüld meg a Rák-köd keletkezésének évét, ismerve, hogy a Földről megfigyelt Rák-köd szögben kifejezett átmérője körülbelül 5 szögperc. Tételezd fel, hogy a szupernóva robbanásától kezdve a Rák-köd d pereme állandó sebességgel tágul.

1/C. Szokatlan vaslencse (5 pont)

A hanghullámok különböző közegekben különböző sebességgel terjednek. Így a hanghullámok megtörhetnek és lencsékkel fókuszálhatók, akár a fényhullámok. A fentiek érdekes példája a Föld vas magja, mely lencseként viselkedik és fókuszálhatja egy robbanás vagy egy földrengés során kibocsátott hanghullámokat.

a) Fénytani ismereteid és a fenti információk alapján becsüld meg, hogy a Föld középpontja felé küldött keskeny, párhuzamos hangnyaláb hol fókuszálódik! Tételezd fel, hogy a gömb alakú lencse a Föld kis sűrűségű köpenyében helyezkedik el.

b) Tételezz fel egy robbanást a Föld felszínén és határozd meg a robbanási pont képpontját, amit a Föld vas magja hoz létre a Föld átmérője mint optikai tengely mentén!

Használd fel a következő adatokat:

A hang terjedési sebessége (és a törésmutató) a Föld belsejében bonyolultan változik a mélységgel. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a Föld 3500 km sugarú vas magjában a hang terjedési sebessége 9 km/s. Hasonlóan tételezzük fel, hogy a földköpenyben, mely 3500 km-től 6400 km-ig terjed, a hangsebesség 11 km/s. Hanyagold el, hogy a hanghullámok egy szilárd közegben lehetnek tranzverzálisak és longitudinálisak, és hogy ezeknek a komponenseknek különböző a terjedési sebességük. A megadott sebességek a gyorsabb, longitudinális hullámokra jellemzőek.

1/D. Egy csillag születése (5 pont)

Egy gömb alakú, M tömegű, Ω térfogatú, egyenletes anyageloszlású hidrogén gázfelhő a gravitációs erő hatására összehúzódik.

a) Bizonyítsd be, hogy a gravitációs erő hatására a gázfelhőben kialakuló gáz nyomásának értéke:

$$(1) \quad P_G(\Omega) = -\frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{\gamma M^2}{\Omega^{4/3}}.$$

b) Egyensúlyban, a gravitációs erő hatására kialakuló nyomást egy másik, a gázfelhőt szétszórni akaró nyomás egyenlíti ki. Ez a nyomás a gáz megszokott nyomása és az úgynevezett „degenerált elektron nyomás” összege. Az utóbbi egy kvantumhatás, mely a Pauli-féle kizárási elv következménye. Az elektronok összenergiájának kifejezése:

$$(2) \quad E_e = \frac{\pi^2 \hbar^2 N_e^{5/3}}{10 m_e \Omega^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3},$$

ahol N_e a gázfelhőben lévő elektronok száma, míg a többi jelölés az általad jól ismert mennyiségeket jelentik. Felhasználva a (2) összefüggést, határozd meg a „degenerált elektronok” által létrehozott nyomást!

Delia Davidescu és Adrian Dafinei, Bukarest

2. feladat. Közel és távol a Holdtól (10 pont)

Egy holdkörüli pályán keringő műhold kamerájával két felvétel készült a Holdról. A felvételeken a Hold $d_1 = 46,5$ mm illetve $d_2 = 40,5$ mm átmérőjű korongként jelenik meg. Az első felvétel akkor készült, amikor az ellipszis alakú pályán keringő műhold megközelítőleg holdközélpontban, míg a második akkor, amikor a műhold megközelítőleg holdtávolban volt.

a) Az ellipszis excentricitása. A fenti információkat felhasználva határozd meg a műhold ellipszispályájának numerikus excentricitását! Becsüld meg, hogy minimálisan mennyi idő telhetett el a két felvétel között! Tudjuk, hogy a felvételeken a holdkorong átmérője egyenesen arányos azzal a szöggel, amely alatt a Hold a műholdról látszik.

b) *Stabil Lagrange-pontok.* Ebben az alkérdésben tekintsük a Hold Föld körüli pályáját körnek. Határozd meg a Hold–Föld egyenes azon pontjait, amelyekben a műhold elhelyezkedhet úgy, hogy körpályán mozogjon a Föld körül, miközben ugyanazon helyzetben marad a Földhöz és a Holdhoz képest is (az ilyen pontokat stabil Lagrange-pontoknak nevezzük). Ismertek: r_{FH} – a Föld és Hold középpontjai közötti távolság, M_{F} – a Föld tömege, M_{H} – a Hold tömege.

c) *Kozmikus ütközés.* Egy meteorit, amely szabadon esik a Hold felszíne felé (a Hold középpontján áthaladó egyenes mentén) a Hold körül R sugarú körpályán mozgó űrállomással ütközik. Ütközés után a meteorit az űrállomás belsejében marad. Az így keletkezett rendszer egy új pályán mozog a Hold körül úgy, hogy a Hold középpontjához viszonyított legkisebb távolsága $r_{\text{min}} = R/2$. Határozd meg a meteorit ütközés előtti sebességét. Ismertek: a Hold M tömege, a γ gravitációs állandó, m_1 – az űrállomás tömege; m_2 – a meteorit tömege.

Mihail Sandu, Nagyszeben

3. feladat. Compton-szórás (10 pont)

Egy λ_i hullámhosszúságú foton mozgásban lévő, szabad elektronon szóródik. A szóródás következtében az elektron megáll, és a λ_0 hullámhosszúságúvá változott szóródott foton az eredeti irányához képest $\vartheta = 60^\circ$ -os szögben halad tovább, majd újra szóródik egy szabad elektronon, ami azonban nyugalomban van. Ebben a második ütközésben a foton $\lambda_f = 1,25 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszra tesz szert, és a λ_0 hullámhosszú foton haladási irányához képest szintén $\vartheta = 60^\circ$ -os szögben halad tovább.

Határozd meg az első elektron de Broglie-féle hullámhosszát a kölcsönhatás előtt!

A következő adatok ismertek:

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} - \text{Planck-állandó,}$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} - \text{az elektron tömege,}$$

$$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s} - \text{a fénysebesség vákuumban.}$$

Delia Davidescu és Adrian Dafinei, Bukarest