

## I. rész

1. a) Egy urnában 100 cédula van 1-től 100-ig megszámozva. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre két cédulát kihúzva ikerprím��számok lesznek a cédulákon? (Ikerprím két olyan prím��szám, amelyek a természetes számok sorozatában egymás után következı páratlan számok.)

b) Mennyi a valószínűsége a „hármás iker” húzásának, ha három cédulát húzunk ki egyszerre? (11 pont)

2. Osztható-e a  $\binom{38}{19}$  binomiális együttható 17-tel? (12 pont)

3. Az

$$x^2 + y^2 + kx - \frac{k^2}{2}y + 1 = 0$$

kör egyenletében határozzuk meg a  $k$  paraméter értékét úgy, hogy a kör mindkét koordináta-tengelyt érintse. (14 pont)

4. a) Oldjuk meg az  $[x]^2 + 3 \cdot [x] - 10 = 0$  egyenletet a valós számok halmazán. (Az  $[x]$  az  $x$ -nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelenti.)

b) Milyen  $p$  és  $q$  egész számok esetén elégíti ki egyetlen egység hosszúságú számköz az  $[x]^2 + p[x] + q = 0$  egyenletet? (14 pont)

## II. rész

5. Határozzuk meg az  $x^3 + (3 - 2a)x^2 - a^2x - 3a^2 + 2a^3 = 0$  egyenletben az  $a$  valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet valós gyökei valamilyen sorrendben mértani sorozatot alkossanak. (16 pont)

6. Egy szabályos sokszögben  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  a sokszög négy egymás utáni csúcsa, az  $AC$  szakasz négyzetes közepe az  $AB$  és  $AD$  szakaszoknak. Hány oldalú a sokszög? (16 pont)

7. a) Oldjuk meg a

$$2x^2 - \left[ 2\sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] x + \sin 2\alpha = 0$$

egyenletet, ahol az  $\alpha$  valós paraméter.

b) Mutassuk meg, hogy az  $f(\alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$  hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény a  $g(\alpha) = \cos^2 \alpha$  hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény transzformáltja. (16 pont)

8. a) Mutassuk meg, hogy az  $y = x^3 + ax^2 + (2a - 3)x + a - 2$  görbesereg minden tagja egy ponton megy át, ahol  $a$  tetszőleges valós szám. Adjuk meg ennek a fix pontnak a koordinátáit.

b) Hogyan kell megválasztani az  $a$  paraméter értékét, hogy a hozzá tartozó görbe  $x_0 = 2$  pontjában húzott érintője áthaladjon a  $P(-1; 0)$  ponton? (16 pont)

9. a) Határozzuk meg az  $a$  paraméter értékét, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f \left( \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) = 0,$$

ahol  $f(x) = ax^2 - 3x + 2$ .

b) Számítsuk ki az  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  hozzárendeléssel megadott függvény grafikonja és az  $x$  tengely által meghatározott síkidom területét. (16 pont)