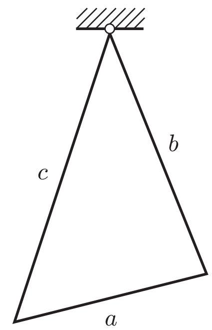
Lapunkban korábban (lásd a 2002. évi 5. szám 229. old.) már foglalkoztunk az „egydimenziós háromszögek” (vagyis a háromszög oldalai mentén koncentrált tömegeloszlású testek) súlypontjának meghatározásával. Az ott közöltek alkalmazásaként az alábbiakban az ilyen háromszögből készült fizikai inga lengésidejét számítjuk ki. A rövidség kedvéért nevezzük lécháromszögnek az ingaként felfüggesztett alakzatot, és vizsgáljuk az alábbi feladatot:

Egyenletes keresztmetszetű és anyagsűrűségű $a \le b \le c$ hosszúságú vékony lécekből merev háromszöget készítünk, és azt az egyik, mondjuk a legrövidebb oldallal szemközti csúcsában a háromszög síkjára merőleges tengelyre ingaként felfüggesztjük (*1. ábra*). Határozzuk meg ennek a fizikai ingának kis kitérések esetén érvényes lengésidő-képletét!



1. ábra

A fizikai ingák lengésidejének képletében a

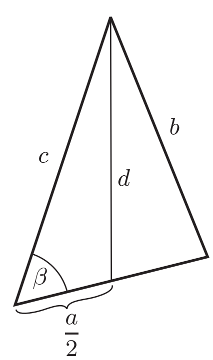
$$\frac{\Theta}{Mgs}$$

kifejezés szerepel; ebben Θ az ingatestnek a forgástengelyre vonatkozó (teljes, a három léc összesített) tehetetlenségi nyomatéka, M az össztömeg, s pedig az inga S tömegközéppontjának (súlypontjának) a tengelytől mért távolsága.

Számítsuk ki először Θ-t! Esetünkben a két hosszabb oldal egy-egy vége illeszkedik a tengelyre, tehát együttes tehetetlenségi nyomatékuk (ha a léc hosszegységre eső tömegét ϱ-val jelöljük):

$$\Theta_b + \Theta_c = \frac{1}{3} m_b \cdot b^2 + \frac{1}{3} m_c \cdot c^2 = \frac{1}{3}\varrho(b^3 + c^3).$$

A harmadik (legrövidebb) oldal tehetetlenségi nyomatékát a Steiner-tétel segítségével határozzuk meg. Ebben szükség van az oldal felezőpontja és a tengely d távolságára (*2. ábra*).



2. ábra

Írjuk fel a koszinusztételt először a teljes háromszögre, majd annak bal oldali felére úgy, hogy a b, illetve a d szakaszokat fejezzük ki. Mindkét összefüggésben szerepel $\cos\beta$, ezt kiküszöbölve kapjuk a keresett d szakasz négyzetére:

$$d^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Ennek felhasználásával már felírhatjuk az egész lécháromszög tehetetlenségi nyomatékának képletét:

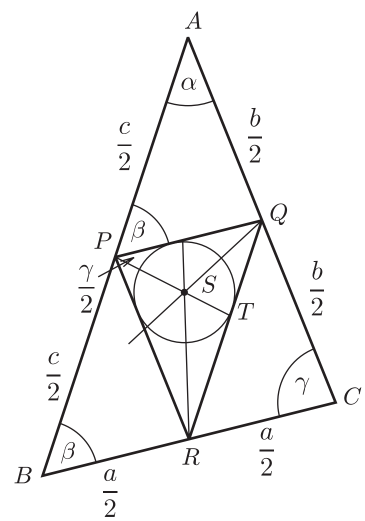
$$\Theta = \frac{1}{3}\varrho(b^3 + c^3) + \frac{1}{12}\varrho a \cdot a^2 + \varrho a \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} =$$

$$= \frac{2b^3 + 2c^3 - a^3 + 3ab^2 + 3ac^2}{6}\varrho.$$

Az inga össztömege az oldalak tömegének összegeként számítható:

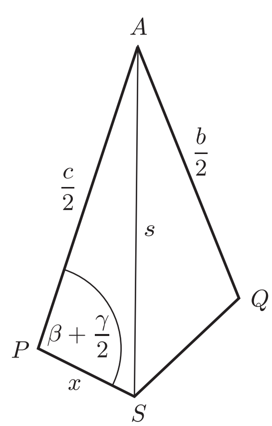
$$M = (a + b + c)\varrho.$$

Belátható (lásd pl. az idézett cikket a KöMaL 2002. évi 5. számában), hogy egy lécháromszög S súlypontja a háromszög P, Q és R oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög belső szögfelezőinek metszéspontjában, vagyis az ide beírható kör középpontjában van (*3. ábra*). (Az eredeti háromszög szögei a szokásos jelekkel: α, β és γ.)



3. ábra

Az s szakasz meghatározásához tekintsük azt a négyszöget, amelynek csúcsai a következők: az S súlypont, a b oldal Q felezőpontja, a lengési tengelyt képező A háromszög-csúcspont, és végül a c oldal P felezőpontja (*4. ábra*).

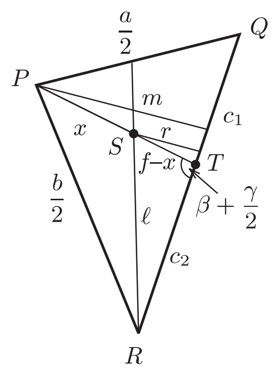


4. ábra

A vizsgált négyszögben az AS átlóra vonatkozó koszinusztétel:

$$s^2 = \frac{c^2}{4} + x^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot x \cdot \cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right).$$

Ebben x az eredeti háromszög oldalfelező pontjai által képzett kis háromszög egyik belső szögfelezőjének része (azon darabja, amely a c oldal P felezőpontjától a kis háromszögbe beírható kör középpontjáig, vagyis esetünkben a léckeret S fizikai súlypontjáig tart). Nagyságát meg tudjuk határozni abból, hogy a háromszög szögfelezőjének hossza ismert módon (lásd pl. Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor: *Érdekes matematikai feladatok VI.,* Középiskolai szakköri füzetek, 1975. 108. feladat) kiszámítható az oldalak hosszából. A számolás során felhasználjuk a szögfelező-tételt, amelyben a c oldalnak a szögfelelző által szétválasztott két része, c_1 és c_2 szerepel (*5. ábra*).



5. ábra

Jelen esetben a kis háromszög $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ hosszúságú oldalai által közrefogott szögfelezőről van szó, amelynek hossza tehát (az idézett tétel szerint):

$$f=\frac{\sqrt{ab(a+b)^2-abc^2}}{2(a+b)}.$$

Az 5. ábrán szerepel még az oldalfelező pontok által meghatározott kis háromszögbe írható kör r sugara, illetve a $\frac{c}{2}$ hosszúságú oldalhoz tartozó m magasság. A magasság és a szögfelező, valamint r és a szögfelező mellette levő része két derékszögű háromszöget alkot; ezek hasonlósága miatt fennáll, hogy

$$\frac{f-x}{f}=\frac{r}{m}.$$

Ha az eredeti (a, b és c oldalú) nagy háromszög területe t, akkor a kis háromszögé $\frac{t}{4}$. Héron képletét használva kapjuk, hogy

$$\frac{r}{m}=\frac{c}{a+b+c},$$

s evvel:

$$x=f\cdot\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{\sqrt{ab(a+b)^2-abc^2}}{2(a+b+c)}.$$

A 4. ábrán látható négyszög átlója s hosszának kiszámításához szükségünk van a $\beta+\frac{\gamma}{2}$ szög koszinuszának értékére is. Az 5. ábrán az $STR\sphericalangle$ a 4. ábrán látható $APS\sphericalangle$ váltószöge, tehát egyenlőek. Az TRP háromszög RS szögfelezőjének ℓ hossza ugyanúgy határozható meg, ahogyan korábban x-et kaptuk. A kiszámított ℓ értéket az STR háromszögre felírt

$$\ell^2=(f-x)^2+c_2^2-2(f-x)c_2\cdot\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)$$

koszinusztételbe helyettesítve, majd abból a kívánt koszinusz értéket kifejezve:

$$\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{c^2\left[ab(a+b)^2-abc^2\right]+b^2c^2(a+b+c)^2-(a+b)^2\left[bc(b+c)^2-a^2bc\right]}{2(a+b+c)bc^2\sqrt{ab(a+b)^2-abc^2}}.$$

Ezzel (a már felírt koszinusztételből) a súlypont és a tengely keresett távolságára:

$$s=\frac{\sqrt{c(a+b+c)^2(c-b)+a(b-c)\left[(a+b)^2-c^2\right]+\left[(b+c)^2-a^2\right](a+b)^2}}{2(a+b+c)},$$

a lengésidő képlete pedig (algebrai átalakítások után):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2(b^2+c^2-bc)+a(b+c)-a^2}{3g}\sqrt{\frac{a+b+c}{b^3+c^3-a^3+a(2b^2+2c^2-bc)}}}.$$

A kapott – meglehetősen terjedelmes – lengésidő-képletet (amely akkor is érvényes, ha nem a a legrövidebb oldal) érdemes néhány speciális esetben a fentiektől független, önálló számítással is ellenőrizni. Ilyen speciális eset, amikor

$b = c$, vagyis egyenlőszárú háromszög képezi az ingát ($0 < a < 2b$). Egy ilyen inga súlypontjának helye közvetlen számítással úgy kapható, hogy a két szár együttes $2b\varrho$ tömegét az a alaphoz tartozó m hosszúságú magasságvonalra, annak felezőpontjába helyezzük, az alapvonal teljes $a\varrho$ tömegét pedig a magasságvonal alsó végpontjába koncentrálva képzeljük el. A léchároomszög súlypontja a magasság felezőpontja alatt bizonyos x távolságban lesz, s ezt a távolságot a szokásos nyomatéki egyenletből számíthatjuk ki:

$$2b\varrho \cdot x = a\varrho\left(\frac{m}{2} - x\right).$$

Ebből

$$x = \frac{ma}{2(2b+a)},$$

vagyis a súlypont és a forgástengely távolsága

$$s = \frac{m}{2} + x = \frac{m}{2} + \frac{ma}{2(2b+a)} = m \cdot \frac{a+b}{2b+a}.$$

Az inga teljes tömege: $M = (a+2b)\varrho$. A rendszer tehetetlenségi nyomatéka a három léc tehetetlenségi nyomatékának összegeként számolható. A háromszög alapját képező lécdarabnak a rajta kívül fekvő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a Steiner-tétel alapján

$$\Theta_a = \frac{1}{12}a\varrho \cdot a^2 + a\varrho \cdot m^2,$$

ahol (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) a magasság négyzete

$$m^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}.$$

A háromszög szárait alkotó lécek tehetetlenségi nyomatéka a végpontjukon átmenő tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta_b = \Theta_c = \frac{1}{3}b\varrho \cdot b^2,$$

a teljes léchároomszög tehetetlenségi nyomatéka pedig

$$\Theta = \Theta_a + \Theta_b + \Theta_c = 2 \cdot \frac{1}{3}b\varrho \cdot b^2 + \frac{1}{12}a\varrho \cdot a^2 + a\varrho \cdot m^2 = \frac{4b^3 + 6ab^2 - a^3}{6}\varrho.$$

Mindezek felhasználásával a lengésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4b^3 + 6ab^2 - a^3}{3g(a+b)\sqrt{4b^2 - a^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(2b^2 + 2ba - a^2)\sqrt{2b+a}}{3g(a+b)\sqrt{2b-a}}}.$$

Az általános képletben $b = c$ helyettesítést alkalmazva megkapjuk ugyanezt az eredményt, ezzel ellenőriztük egy speciális esetben az általános formula helyességét.

Ha – mesterkélt módon – még az $a = 0$ „oldalhosszal" is számolunk, akkor két, szorosan egymás mellett elhelyezkedő lécdarab, vagyis egy M tömegű rúdinga esetét kapjuk, amelynek lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{Mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}Mb^2}{Mg\frac{b}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2b}{3g}},$$

amit természetesen – határesetben – az általános képlet is visszaad.

Hasonlóan számíthatjuk ki egy szabályos léchároomszög lengésidejét is. Az általános képletből $a = b = c$ helyettesítéssel, vagy a fizikai inga lengésidő-képletéből (a tömegközéppont helyzetének ismeretében, és a Steiner-tételt alkalmazva) adódik:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}}.$$