1. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a) \qquad \sqrt{\log_2^2 x - 4\log_2 x + 4} = \log_2 \frac{4}{x} \qquad (6\ pont)$$

$$b) \qquad \sqrt{5 - \cos^2 x - 4\sin x} = 2 - \sin x \qquad (6\ pont)$$

Megoldás. *a*) Az egyenletben szereplő logaritmusok miatt $x > 0$ kell, hogy legyen. Az egyenlet jobb oldala így alakítható:

$$\log_2 \frac{4}{x} = \log_2 4 - \log_2 x = 2 - \log_2 x.$$

Érdemes bevezetni a $\log_2 x = a$ új ismeretlent: $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$. Mivel a négyzetgyök alatt teljes négyzet van, azért egyenletünk: $|a - 2| = 2 - a$. Innen $a \le 2$. Tehát $\log_2 x \le 2 = \log_2 4$, ahonnan $x \le 4$, a $\log_2 x$ monoton növekedése miatt.

Az eredeti egyenletet kielégítő valós számok: $0 < x \le 4$.

b) Próbáljuk elérni a négyzetgyök alatt, hogy csak egyfajta szögfüggvény szerepeljen.

$$\sqrt{5 - (1 - \sin^2 x) - 4\sin x} = 2 - \sin x,$$

$$\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x + 4} = 2 - \sin x,$$

$|\sin x - 2| = 2 - \sin x$, ahonnan $\sin x - 2 \le 0$, azaz $\sin x \le 2$.

Tehát az eredeti egyenlet minden valós számra teljesül.

2. *Egy kocsmáros kiszámította, hogy ha a* 60%*-os alkoholjához hozzáönt* 12 *liter vizet, akkor* 42%*-os alkoholként árulhatja azt.*

a) *Hány liter volt az eredeti* 60%*-os alkohol?* (*6 pont*)

b) *A nagyobb nyereség reményében a kocsmáros nem* 12*, hanem* 16 *liter vizet öntött az eredeti alkoholhoz. A kocsmáros azt tapasztalta, hogy a* 42%*-os alkohol esetében a* $\pm 2\%$*-os eltérést műszer nélkül még nem fedezik fel a fogyasztók, de az annál nagyobb eltérést már igen. Észreveszik-e a vendégek a csalást?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az eredeti 60%-os alkohol x liter, tehát a keverékben levő tömény alkohol $0{,}6x$ liter. 12 liter vizet hozzáöntve a keverék mennyisége $x + 12$ liter, de a benne levő tömény alkohol mennyisége nem változik. Ekkor 42%-os oldatot kapunk, így a következő egyenletet írjuk fel:

$$\frac{0{,}6x}{x + 12} \cdot 100 = 42, \quad \text{azaz} \quad 60x = 42x + 504, \quad \text{ahonnan} \quad x = 28.$$

Tehát az eredeti 60%-os alkohol 28 liter volt.

b) Ha 28 liter 60%-os alkoholhoz 16 liter vizet öntünk, akkor annak a töménysége

$$\frac{28 \cdot 0{,}6}{28 + 16} \cdot 100 \approx 38{,}18\%$$

lesz. Ez több, mint 2%-kal tér el a tervezett 42%-os alkoholtól, ami azt jelenti, hogy a fogyasztók észreveszik a „csalást”.

3. *Egy felmérés során megkérdeztek* 52 *családot a családban élő gyerekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét a* táblázat *mutatja.*

		Fiúk száma					
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Lányok száma	**0**	6	1	2	2	1	0
	1	2	3	2	1	2	1
	2	4	3	2	1	3	1
	3	3	2	2	1	1	0
	4	1	1	1	1	0	0
	5	0	1	0	1	0	0

(*Tehát pl. olyan család, melyben egyetlen gyermek sincs* 6 db *volt, míg olyan, amelyben egy fiú és két lány,* 3 *volt.*)

a) *Átlagosan hány gyermek van egy családban?* (*5 pont*)

b) *Összesen hány fiú és hány lány van a megkérdezett családokban?* (*4 pont*)

c) *Véletlenszerűen kiválasztva* 2 *családot a megkérdezettek közül, mekkora annak a valószínűsége, hogy e két család mindegyikében legalább* 3 *gyermek van?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Foglaljuk táblázatba, hogy hány olyan család van, melyben $1, 2, \ldots$ stb. gyermek van. A megadott táblázatból kiolvasva:

gyerekszám	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
családok száma	6	3	9	10	7	6	7	3	1

A családokban a gyermekek számának átlaga:

$$\frac{1\cdot 3+2\cdot 9+3\cdot 10+4\cdot 7+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 3+8\cdot 1}{52}=\frac{180}{52}\approx 3{,}46.$$

b) Azoknak a családoknak a száma,
melyben 1 fiú van: $1+3+3+2+1+1=11$, ez 11 fiú;
ahol 2 fiú van: $2+2+2+2+1=9$, ez 18 fiú;
ahol 3 fiú van: $2+1+1+1+1+1=7$, ez 21 fiú;
ahol 4 fiú van: $1+2+3+1=7$, ez 28 fiú;
ahol 5 fiú van: $1+1=2$, ez 10 fiú.

Tehát a vizsgált családokban összesen $11+18+21+28+10=88$ fiú van.

Hasonlóképpen kapjuk a lányok számát: 92.

Megjegyzés. Az *a*) részben összeszámoltuk, hogy összesen 180 gyerek van a vizsgált családokban, így is megkaphatjuk a lányok számát: $180-88=92$.

c) Az 52 család közül kettőt $\binom{52}{2}$-féleképpen választhatunk ki. A feladat táblázatából kiolvashatjuk, hogy 34 azoknak a családoknak a száma, melyekben legalább 3 gyerek van. Ezek közül kettőt $\binom{34}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{34}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{34!}{2!\cdot 32!}\cdot\frac{2!\cdot 50!}{52!}=\frac{33\cdot 34}{51\cdot 52}=\frac{1122}{2652}\approx 0{,}423.$$

4. *A háromkötetes irodalmi lexikont kötetenként is meg lehet vásárolni. Egy alkalommal azt vizsgálták egy könyvesboltban egy héten át, hogy az egyes kötetekből az egyes napokon hány darab fogyott. A vizsgálat eredményét szemlélteti a* táblázat.

	hétfő	**kedd**	**szerda**	**csüt.**	**pént.**	**szomb.**
I. kötet	2	1	4	2	4	2
II. kötet	3	2	2	1	0	2
III. kötet	5	3	4	6	3	3

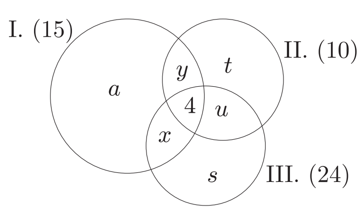
Négy olyan vásárló volt, aki mindhárom kötetet megvette (egy kötetből senki sem vásárolt több példányt.) Azok közül, akik megvásárolták az első kötetet, 6*-an voltak olyanok, akik nem vették meg a másodikat, és szintén* 6*-an voltak, akik nem vették meg a harmadik kötetet.*

a) *Ha olyan vásárló nem volt, aki csak a második kötetet vette meg, akkor hányan vannak azok, akik csak a harmadik kötetet vették meg?* (*6 pont*)

b) *Hány olyan vásárló volt a héten, aki vásárolt az irodalmi lexikonokból?* (*3 pont*)

c) *Mindhárom kötet ára egységesen* 3600 Ft. *Aki két kötetet vásárolt, az az egyik megvásárolt kötetre kapott* 10% *kedvezményt. Aki mindhárom kötetet megvette, az az egyik megvásárolt kötetre* 10%*, egy másik megvásárolt kötetre pedig* 20% *kedvezményt kapott. Mennyi volt a bolt bevétele e kötetek után ezen a héten?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az I. kötetet 15-en, a II. kötetet 10-en, a III. kötetet 24-en vásárolták meg. Ábrázoljuk halmazábrán (*1. ábra*), amit tudunk.

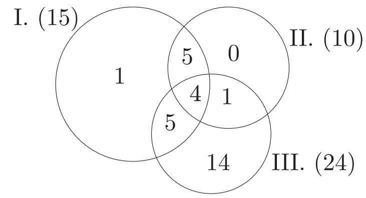


1. ábra

A feltételek szerint $a+x=6$ és $a+y=6$, tehát $x=y$, továbbá $t=0$.

Ezek szerint $2x+a+4=15$, azaz $2x+a=11$. Mivel $a=6-x$, így ezt az előbbi egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $2x+6-x=11$, ahonnan $x=y=5$, és ezzel $a=1$.

Egészítsük ki halmazábránkat (*2. ábra*). Az ábrából kiolvasható, hogy 14-en vásárolták meg csak a III. kötetet.



2. ábra

b) A héten a boltban e kötetekből összesen $1 + 5 + 4 + 5 + 1 + 14 = 30$-an vásároltak.

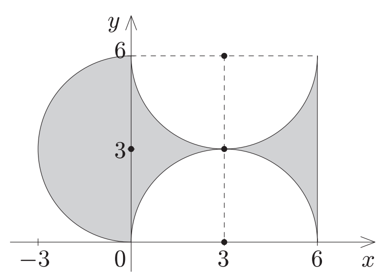
c) A 30 vásárló mindegyike kifizette egy kötet teljes árát. Közülük 15-en az általuk vásárolt második kötet árát, azaz a teljes ár 10%-kal csökkentett árát is kifizették. Az összes vásárló között volt még négy olyan is, aki három kötetet vásárolt, így ők még kifizették négy kötet teljes árának 20%-kal csökkentett árát is. Ezek szerint az üzlet bevétele: $30 \cdot 3600 + 15 \cdot 3600 \cdot 0{,}9 + 4 \cdot 3600 \cdot 0{,}8 = 108\,000 + 48\,600 + 11\,520 = 168\,120$ Ft.

II. rész

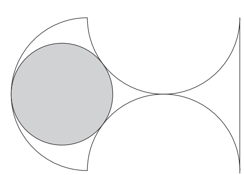
5. *Egy forgástest alakú díszítőelem tengelymetszetét látjuk az* ábrán *egy koordinátarendszerben elhelyezve. A síkmetszetet határoló görbék:*

$$x^2 + (y-3)^2 = 9 \quad (x \leq 0),$$
$$(x-3)^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0),$$
$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 9 \quad (y \leq 6)$$

a) *Mekkora a síkmetszet területe?* (*6 pont*)



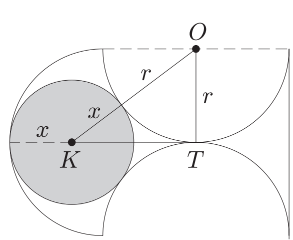
b) *A forgástestbe – hogy stabilabb legyen – egy olyan gömböt helyeztek, mely nem tud elmozdulni. (Ez a síkmetszeten egy olyan főkör, mely két félkört kívülről, egyet pedig belülről érint.) Mekkora e gömb sugara?* (*10 pont*)



Megoldás. *a*) A síkmetszet egy r sugarú félkörből, valamint egy $2r$ oldalú négyzetből kivett r sugarú körből áll, ahol $r = 3$. Tehát a síkmetszet területe:

$$\frac{r^2\pi}{2} + 4r^2 - r^2\pi = 4r^2 - \frac{r^2\pi}{2} = 4 \cdot 3^2 - \frac{3^2\pi}{2} \approx 21{,}86.$$

b) Tekintsük a KTO derékszögű háromszöget.



Az $OT = r$, $OK = r + x$ és $TK = 2r - x$ felhasználásával felírjuk a Pitagorasz-tételt: $(r + x)^2 = r^2 + (2r - x)^2$, amiből

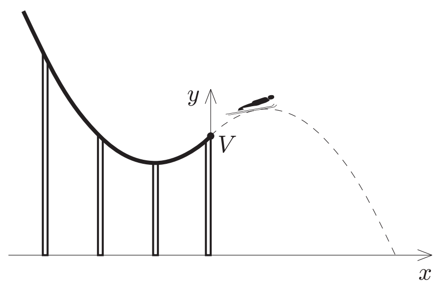
$$r^2 + x^2 + 2rx = r^2 + 4r^2 + x^2 - 4rx,$$

azaz $6rx = 4r^2$. Vagyis $x = \frac{2}{3}r = 2$.

6. *Az* ábrán *egy sísánc lesikló pályáját látjuk egy koordinátarendszerhez rögzítve. A sánc az*

$$f(x) = \frac{4}{250}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{322}{5}$$

függvény grafikonjához illeszkedik, ahol az x tengely az 1000 m*-es tengerszint feletti magasságon; a sánc V végpontja az y tengelyen van. Az egyik síelő a V pontot elhagyva egy olyan parabola-pályán repül tovább, mely a sáncnak megfelelő parabola V-re vonatkozó tükörképe.*



a) A tengerszinthez képest milyen magasságig repül fölfele a síelő? *(4 pont)*
b) A sánc V végpontját tartalmazó tartóoszloptól milyen távol éri el az 1000 m*-es tengerszint feletti magasságot a síelő?* *(6 pont)*
c) Írja fel a síelő röppályája érintőjének egyenletét a sánc elhagyásának pillanatában. *(6 pont)*

Megoldás. *a)* A másodfokú kifejezést a következő módon alakítjuk:

$$\frac{4}{250}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{322}{5} = \frac{4}{250}\cdot[x^2 + 60x + 4025] = \frac{4}{250}\cdot\left[(x+30)^2 + 3125\right] =$$

$$= \frac{4}{250}\cdot(x+30)^2 + 50$$

A sípálya görbéjének tehát $x = -30$-ban van minimuma, minimumértéke 50. A sípálya görbéje az y tengelyt $\frac{322}{5} =$ 64,4-nél metszi. Ezek szerint a V pontra vonatkozó tükörképének maximuma a $(-30; 50)$ pontnak a $(0; 64{,}4)$ pontra vonatkozó tükörképe, vagyis a $(30; 78{,}8)$ pont. Ezek szerint a síelő a sípályát elhagyva az alábbi görbe mentén repül:

$$y = -\frac{4}{250}\cdot(x-30)^2 + 78{,}8.$$

Ez azt jelenti, hogy a tengerszinthez képest a síelő 1078,8 m magasságig repül.

b) Azt kell kiszámítanunk, hogy a síelő röppályájának hol van $x > 0$ esetén zérushelye.

$$-\frac{4}{250}\cdot(x-30)^2 + 78{,}8 = 0, \quad \text{azaz} \quad (x-30)^2 = \frac{250\cdot 78{,}8}{4} = 4925.$$

Innen $x \approx 100{,}2$. Tehát a síelő a szélső tartóoszloptól kb. 100,2 m távolságra éri el az 1000 méteres tengerszint feletti magasságot.

c) A keresett érintő áthalad a $P(0; 64{,}4)$ ponton. Meredeksége a síelő pályaegyenletét leíró függvénynek az $x = 0$ helyen vett deriváltja.

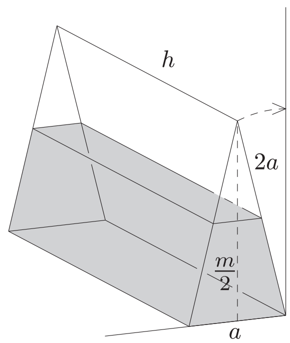
$$f'(x) = \left[-\frac{4}{250}\cdot(x-30)^2 + 78{,}8\right]' = -\frac{8}{250}x + \frac{24}{25}, \quad \text{azaz} \quad f'(0) = \frac{24}{25}.$$

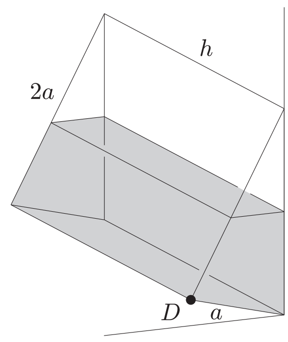
Ezek szerint a keresett érintő egyenlete:

$$y - 64{,}4 = \frac{24}{25}x, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{24}{25}x + 64{,}4.$$

7. *Egy egyenes hasáb alapja olyan egyenlő szárú háromszög, melynek szára az alap kétszerese. A hasáb a háromszög alapjára illeszkedő oldallapján fekszik a földön a fal mellett, és ilyen helyzetben magasságának feléig megtöltöttük vízzel (lásd bal oldali* ábra*), a test falának vastagsága elhanyagolható.*

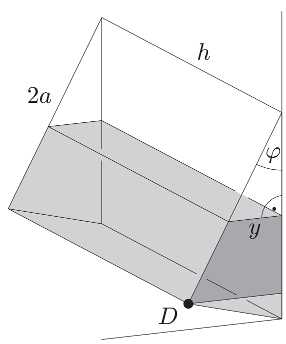
a) Milyen magasan áll a víz a testben, ha azt elforgatva a falnak támasztjuk (lásd jobb oldali ábra*)?* *(8 pont)*

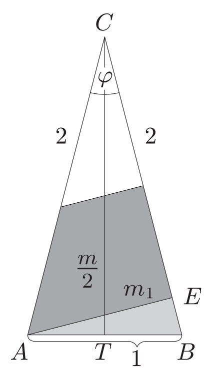




b) A test D csúcsában van egy dugó. Miután a hasábot a leírt módon a falnak támasztottuk, kihúztuk a dugót, ahonnan a víz 12 liter/perc *átlagos sebességgel folyik ki a testből. Mennyi ideig folyik a víz, ha* $a = 1$ m, $h = 4$ m? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Tekintsük az *ábrát*. Ha a hasáb eredeti helyzetében magasságának feléig van megtöltve, akkor a síkmetszet „üres” tartománya olyan egyenlő szárú háromszög, mely hasonló az eredeti háromszöghöz és a hasonlóság aránya 1 : 2. Tehát az „üres” háromszög területe az eredeti háromszög területének negyed része.





Az eredeti háromszög magassága:

$$m = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Az eredeti háromszög T területe: $T = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, így az „üres” háromszög T_1 területe: $T_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{16}$.

Ezek szerint a bal oldali ábrán látható „üres”, derékszögű háromszögre az alábbi összefüggéseket írhatjuk fel:

$$(1) \qquad \frac{xy}{2} = \frac{\sqrt{15}}{16}, \quad \text{és} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

A $\cos\varphi$ értékét az eredeti háromszögből kaphatjuk meg a koszinusztétel segítségével: $1 = 4 + 4 - 8\cos\varphi$, ahonnan $\cos\varphi = \dfrac{7}{8}$. Ezt felhasználva az (1) egyenletrendszer így alakul:

$$y = \frac{\sqrt{15}}{8x} \quad \text{és} \quad \frac{49}{64} = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{49}{64} = \frac{x^2}{x^2 + \dfrac{15}{64x^2}}.$$

Bővítsük az utóbbi tört jobb oldalát x^2-tel:

$$\frac{49}{64} = \frac{x^4}{x^4 + \dfrac{15}{64}}, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{49}{64}x^4 + \frac{49}{64}\cdot\frac{15}{64} = x^4, \quad \text{vagyis} \quad x^4 = \frac{49}{64},$$

tehát $x = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$, amiből $2 - x = 2 - \sqrt{\dfrac{7}{8}} \approx 1{,}065$.

Ezek szerint a hasáb megdöntése után a víz magassága kb. 1,065 m.

b) Egy olyan egyenes hasáb térfogatát kell kiszámolni, melynek alapja egy derékszögű trapéz (ezt a két ábrán sötétebbre színeztük).

A jobb oldali ábra ABE és CBT háromszögei hasonlók, és a hasonlóság aránya $1:2$, így az ABE háromszög területe a CBT háromszög területének negyed része, vagyis az eredeti háromszög területének $\frac{1}{8}$-a. Mivel az „üres” rész területe – mint láttuk – az eredeti háromszög területének a negyede, így a hasáb alapját alkotó trapéz területe az eredeti háromszög területének $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$-ad része, azaz

$$T_{\text{trapéz}}=\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5\sqrt{15}}{32}.$$

A hasáb V térfogata:

$$V=\frac{5\sqrt{15}}{32}\cdot 4\approx 2{,}4206\ \mathrm{m}^3=2420{,}6\ \text{liter}.$$

A folyás sebessége 12 liter/perc, így a dugó kihúzása után a víz $\frac{2420{,}6}{12}\approx 201,7$ percig folyik a tartályból.

8. *a) Egy számtani sorozat első tagja $\overline{ab}$, második tagja $\overline{ba}$ (kétjegyű számok), harmadik tagja az $\overline{acb}$ háromjegyű szám. Mekkora e sorozat differenciája?* *(9 pont)*

b) Legyenek a_n és b_n pozitív egészekből álló, nem állandó számtani sorozatok. Igazoljuk, hogy $a_{b_n}-b_{a_n}$ n-től független állandó. *(7 pont)*

Megoldás. *a)* Ha $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{acb}$ egy számtani sorozat egymást követő három tagja, akkor

$$\frac{\overline{ab}+\overline{acb}}{2}=\overline{ba}.$$

Csak $a=1$ lehet, ugyanis $a\ge 2$ esetén a bal oldali számláló 200-nál nagyobb lenne, így a jobb oldal nem lehetne kétjegyű szám. Tehát $a=1$, így $\overline{1b}+\overline{1cb}=2\cdot\overline{b1}$, azaz $10+b+100+10c+b=20b+2$, ahonnan $108=18b-10c$.

Ez utóbbi egyenlőség bal oldala osztható 9-cel. Mivel a jobb oldal első tagja is osztható 9-cel, így a második tagnak is 9-cel oszthatónak kell lennie, ami csak úgy lehet, ha $c=0$, ekkor $b=6$; vagy ha $c=9$, de ekkor $b=11$, ami nem megoldás.

Tehát a sorozat első három tagja: 16, 61, 106, így a sorozat d differenciája: $d=61-16=45$.

b) Legyen az a_n sorozat első tagja a, differenciája d_1, a b_n sorozat első tagja b, differenciája d_2. Ekkor

$$a_{b_n}=a+(b_n-1)d_1=a+\big[b+(n-1)d_2-1\big]d_1=a+bd_1+nd_2d_1-d_2d_1-d_1,$$
$$b_{a_n}=b+(a_n-1)d_2=b+\big[a+(n-1)d_1-1\big]d_2=b+ad_2+nd_1d_2-d_1d_2-d_2.$$

Tehát $a_{b_n}-b_{a_n}=a-b+bd_1-ad_2-d_1+d_2$, és ez valóban n-től független állandó.

9. *a) Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:*

$$\sqrt{x^2-15x+36}+\sqrt{-x^2+19x-84}+\log_{\frac{x}{2}}36. \qquad (6\ pont)$$

b) Mely x, y, z valós számok elégítik ki az alábbi egyenletet?

$$\sqrt{x^2-15x+36}+\sqrt{-x^2+19x-84}+\log_{\frac{x}{2}}36=2\cos 3z-y^2+4y-4. \qquad (10\ pont)$$

Megoldás. *a)* A megadott kifejezésben x-re nézve az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

$$x^2-15x+36\ge 0,\quad -x^2+19x-84\ge 0,\quad x>0,\quad x\ne 2.$$

Az első egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés zérushelyei: 3 és 12, így az egyenlőtlenség megoldása: $x\le 3$ vagy $12\le x$.

A második egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés zérushelyei: 7 és 12, így ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása: $7\le x\le 12$.

A két egyenlőtlenség megoldását a másik két feltétellel egybevetve az eredeti egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x=12$.

b) Helyettesítsük az egyenletbe a kapott $x=12$ értéket:

$$\log_6 36=2\cos 3z-(y^2-4y+4),\quad \text{azaz}\quad 2=2\cos 3z-(y-2)^2.$$

A kapott egyenlet jobb oldalán $\cos 3z$ értéke legfeljebb 1, így az egyenlet jobb oldalának értéke legfeljebb 2. Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\cos 3z=1$ és $(y-2)^2=0$, azaz $y=2$. A $\cos 3z=1$ egyenletből pedig $3z=2k\pi$, azaz $z=\frac{2}{3}\cdot k\pi$.

Tehát az eredeti egyenletet kielégítő x, y, z valós számok: $x=12$, $y=2$, $z=\frac{2}{3}\cdot k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).