[1]

A1. Keressük meg α minden olyan értékét, amelyre az

$$y=\alpha x^2+\alpha x+\frac{1}{24}\quad \text{és az}\quad x=\alpha y^2+\alpha y+\frac{1}{24}$$

görbék érintik egymást.

A2. Legalább mekkora a területe egy síkbeli konvex halmaznak, amely metszi az $xy=1$ hiperbola mindkét szárát és az $xy=-1$ hiperbola mindkét szárát? (Akkor mondjuk a síkbeli S halmazról, hogy *konvex,* ha S tartalmazza bármely két pontjának összekötő szakaszát.)

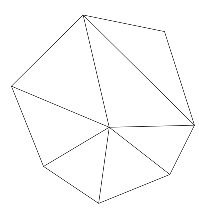
A3. Legyen k pozitív egész szám. Véletlenszerű sorrendben egymás után leírjuk az $1,2,3,\dots,3k+1$ egészeket. Mi a valószínűsége annak, hogy a leírás során nincs olyan időpillanat, amikor az addig már leírt számok összege osztható 3-mal? A válasz zárt alak legyen, de tartalmazhat faktoriálisokat.

A4. A *csupaegyes* kifejezés jelentsen olyan tízes számrenszerben írt pozitív egészeket, amelyeknek minden jegye 1-es. Keressük meg az összes olyan valós együtthatós f polinomot, amelyre hogyha n csupaegyes, akkor $f(n)$ is az.

A5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges csoportnak pontosan n darab p rendű eleme van, ahol p prímszám, akkor vagy $n=0$, vagy p osztója $(n+1)$-nek.

A6. Egy P sokszög $\mathcal{T}$ *háromszögelésének* nevezzük véges sok háromszögnek olyan együttesét, amelyek uniója P, és amelyben bármely két háromszög közös része vagy üres, vagy egy közös csúcs, vagy egy közös oldal; továbbá a sokszög minden oldala pontosan egy $\mathcal{T}$-beli háromszög oldala legyen.

Tekintsünk egy $\mathcal{T}$ háromszögelést *megfelelőnek,* ha minden belső csúcsban legalább 6 háromszög találkozik. Példa:



Bizonyítsuk be, hogy létezik csak n-től függő M_n egész szám, amelyre egy n oldalú P sokszög minden megfelelő háromszögelése legfeljebb M_n háromszögből áll.

B1. Legyen f pozitív egész együtthatós polinom, n pedig pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ pontosan akkor osztója $f\big(f(n)+1\big)$-nek, ha $n=1$. [A szerkesztő megjegyzése: fel kell tennünk, hogy f nem konstans.]

B2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f\colon[0;1]\to\mathbb{R}$ függvény folytonosan deriválható és

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0,$$

akkor minden $\alpha\in(0;1)$ esetén

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right|\le\frac{1}{8}\max_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|.$$

B3. Legyen $x_0=1$ és minden $n\ge 0$ esetén legyen

$$x_{n+1}=3x_n+\left\lfloor x_n\sqrt{5}\,\right\rfloor.$$

Így tehát $x_1=5$, $x_2=26$, $x_3=136$, $x_4=712$. Fejezzük ki x_{2007}-et zárt alakban. ($\lfloor a\rfloor$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amelyik nem nagyobb a-nál.)

B4. Legyen n pozitív egész. Hány olyan P, Q valós együtthatós polinompár van, amelyekre

$$\big(P(X)\big)^2+\big(Q(X)\big)^2=X^{2n}+1$$

és $\deg P>\deg Q$.

[1] A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: `http://math.scu.edu/putnam/index.html`, a megoldások a `http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml` honlapon találhatók.

B5. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egészre léteznek olyan

$$P_0(n), P_1(n), \ldots, P_{k-1}(n)$$

(esetleg k-tól függő) polinomok, amelyekre minden n egész esetén

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^k = P_0(n) + P_1(n) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \cdots + P_{k-1}(n) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-1}.$$

($\lfloor a \rfloor$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amelyik nem nagyobb a-nál.)

B6. Minden n pozitív egészre legyen $f(n)$ az a szám, ahányféleképpen $n!$ centnek megfelelő értéket összeállíthatunk olyan érmékből, amelyek mindegyike $k!$ centet ér (a sorrend nem számít), ahol $1 \leq k \leq n$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n-től független C konstans, amelyre

$$n^{n^2/2-Cn} e^{-n^2/4} \leq f(n) \leq n^{n^2/2+Cn} e^{-n^2/4}.$$