1. feladat. *Egy kör mentén $n > 3$ kártyát helyeztünk el úgy, hogy mindegyik kártyának a hátoldala látható. Egy lépésben három szomszédos kártyával az alábbi helycserét végezhetjük: a három közül az egyik szélső kártyát a másik szélső kártya helyére tesszük, a fennmaradó két kártyát pedig eggyel odébbtoljuk és megfordítjuk. Ilyen lépések sorozatával elérhető-e, hogy minden kártya a kiindulási helyére kerüljön és az előlapja legyen látható?*

Megoldás. Állítjuk, hogy nem létezik a feladatban leírt lépéssorozat. Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy van ilyen. Figyeljük meg, hogy minden lépésben páros sok kártyát fordítunk meg, ezért a hátoldalukat mutató kártyák számának paritása sosem változik. Mivel kiinduláskor minden kártyának a hátoldala volt látható, a lépéssorozat végére pedig 0 ilyen kártya lett, a kör mentén elhelyezett kártyák száma páros. A kártyák helyét ezek szerint kiszínezhetjük feketére és fehérre úgy, hogy a színek felváltva következzenek a kör mentén. A helycsere szabályából adódóan ha egy kártyát egy lépésben megfordítunk, akkor a helyének a színe is megváltozik, ha pedig nem fordítjuk meg a kártyát a lépés során, akkor az ugyanolyan színű helyre kerül, mint amilyenen a lépés előtt volt. Ebből az következik, hogy ha egy kártya az eredeti helyére kerül egy lépéssorozat során, akkor annak szükségképpen a hátlapja (tehát nem az előlapja) látszik. Ez ellentmond az indirekt feltevésünknek, vagyis igazoltuk, hogy nem létezik a feladatban leírt lépéssorozat. $\square$

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* 2*-vel kezdődő, egészekből álló (véges vagy végtelen) számtani sorozat bármely* 2007 *szomszédos tagja között van olyan, amely a többi* 2006*-hoz relatív prím, akkor bármely* 2008 *szomszédos tagja között van olyan, amely a többi* 2007*-hez relatív prím.*

Megoldás. Jelölje d a szóban forgó számtani sorozat különbségét. Ha d páros, akkor a sorozat csupa páros számból áll. Egy ilyen sorozatra csak úgy lehet igaz a feladatban leírt tulajdonság, ha a sorozatnak legfeljebb 2006 tagja van. Ekkor persze a feladat az üreshalmaz eleméről állít valamit, tehát nincs mit bizonyítanunk.

Az érdekes eset az, amikor d páratlan. Tekintsük a sorozat 2008 egymást követő tagját, legyen ezek halmaza mondjuk $H = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+2007d\}$. Mivel d páratlan, azért a és $a+2007d$ ellentétes paritásúak; jelölje p közülük a páratlant. Ekkor $H \setminus \{p\}$ a vizsgált számtani sorozat 2007 szomszédos tagja, így a feltétel szerint valamelyikük (mondjuk q) relatív prím $H \setminus \{p\}$ minden eleméhez. Állítjuk, hogy q teljesíti a feladat által megkívánt tulajdonságot, azaz q a H halmaz minden eleméhez relatív prím. Ehhez pedig csupán azt kell igazolnunk, hogy p és q relatív prímek.

Világos, hogy q páratlan, hiszen a $H \setminus \{p\}$ sorozatnak van q-tól különböző páros tagja, amihez q relatív prím. Márpedig ha p és q páratlan tagjai egy páratlan különbségű számtani sorozatnak, akkor sorszámuk páros számmal különbözik, így $r := \frac{p+q}{2}$ is tagja a számtani sorozatnak. Ráadásul, mivel p a H „szélső” eleme, $r \in H \setminus \{p\}$ is teljesül. Ezért q és r relatív prímek a q választása miatt. Jelölje D a (páratlan) p és q számok legnagyobb közös osztóját. Világos, hogy $D \mid p+q$ és mivel D páratlan, azért $D \mid \frac{p+q}{2} = r$ is teljesül. Azt kaptuk, hogy D közös osztója a relatív prím q és r számoknak. Ezt azt jelenti, hogy $D = 1$, tehát p és q is relatív prímek. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. $\square$

Megjegyzés. Több dolgozatban szerepel, hogy a feladatban leírt tulajdonságú számtani sorozatok differenciája páratlan. Jóllehet ez az állítás nem igaz, az értékelés során ezt nem tekintettük komoly hibának, hiszen az „elnézett” esetben a feladat állítása az üreshalmaz elemére vonatkozik. Felmerül azonban, hogy páratlan d esetén nincs-e vajon ugyanerről szó. Más szóval: létezik-e egyáltalán olyan legalább 2007 tagú számtani sorozat, ami megfelel a feladat feltételeinek. „Szerencsére” a válasz igen: könnyen belátható, hogy ha d a 2-nél nagyobb és 1004-nél kisebb prímek szorzata, akkor a $2+d, 2+2d, 2+3d, \ldots$ végtelen számtani sorozat bármely 2007 egymást követő tagja közül a középső relatív prím a többi 2006 tag bármelyikéhez.

3. feladat. *Bizonyítandó, hogy a sík rácspontjainak tetszőleges véges H halmazából kiválasztható olyan K részhalmaz, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

(*a*) *a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K-t legfeljebb* 2 *pontban metszi,*

(*b*) *$H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K-beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.*

1. megoldás. Azt mondjuk, hogy K' a H *megengedett* részhalmaza, ha K'-nek minden függőleges egyenesen legfeljebb két pontja van (tehát vízszintes egyenesen lehet akár több is), és a K' pontjait összekötő tengelypárhuzamos szakaszok lefedik H minden pontját. Létezik megengedett halmaz: ilyen K'-t alkotnak például H mindazon pontjai, amelyek a saját függőleges egyenesükön legalsók vagy legfelsők, hiszen ekkor már a K' pontjai meghatározta függőleges szakaszok lefedik H minden pontját.

Legyen K egy olyan megengedett halmaz, amelyre a K pontjait összekötő függőleges (esetleg ponttá fajuló) zárt szakaszok által lefedett H-beli pontok száma minimális. Állítjuk, hogy ez a K kielégíti a feladat követelményeit. A K halmaz megengedettsége miatt mindössze azt kell belátnunk, hogy K-nak minden vízszintes egyenesen legfeljebb két pontja van.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy K három pontja, mondjuk p, q és r egy vízszintes egyenesre esnek úgy, hogy a q a p és az r között van. Ha a q pontot tartalmazó függőleges egyenesen K-nak nincs más pontja, akkor legyen $K' = K \setminus \{q\}$. Ha van, akkor pontosan egy van (mondjuk s). Legyen q' a qs nyílt félegyenesnek a q végponthoz legközelebbi H-beli pontja (ilyen van, mert $s \in K \subseteq H$), és legyen $K' = K \setminus \{q\} \cup \{q'\}$. Mindkét esetben $K' \subseteq H$, K'-nek minden függőleges egyenesen legfeljebb két pontja van, és a K' pontjait összekötő tengelypárhuzamos szakaszok lefedik $H \setminus K'$ minden pontját. Ráadásul a K' pontjait összekötő függőleges (esetleg ponttá fajuló) zárt szakaszok által lefedett H-beli pontok száma kisebb, mint ugyanez a szám a K esetén. Ez nem lehetséges.

A kapott ellentmondás igazolja, hogy a K halmaz a feladatban megfogalmazott mindkét feltételt teljesíti. $\square$

A fenti érvelés bár igazolja a feladat állítását, nem ad jól használható algoritmust egy megfelelő K halmaz megtalálására. Az alábbi megoldás ezzel is szolgál.

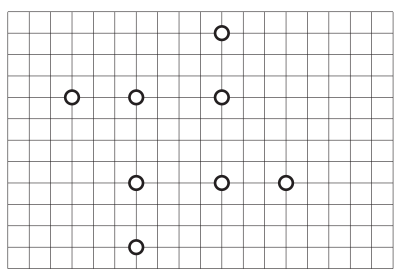
2. megoldás. A H halmaz mérete szerinti indukcióval bizonyítunk. Világos, hogy ha $|H| = 1$, akkor $K = H$ teljesíti a feladatbeli feltételeket. Tegyük fel, hogy legfeljebb n pontú H halmazra már igazoltuk az állítást, és legyen a H halmaznak $n+1$ pontja.

Alkossák a K^* halmazt a H azon pontjai, amelyek a saját függőleges egyenesükön legalsók vagy legfelsők. Világos, hogy K^* teljesíti a feladat (b) feltételét. Ha az (a) feltétel is teljesül K^*-ra, akkor készen vagyunk: $K = K^*$ megfelelő. Ha azonban az (a) feltétel nem teljesül, akkor ennek az az oka, hogy van K^*-nak olyan q pontja, hogy a q vízszintes egyenesén q-tól balra és jobbra is van K^*-nak pontja, mondjuk p és r.

Az indukciós feltevés szerint az n pontú $H \setminus \{q\}$ halmaznak létezik olyan K részhalmaza, ami minden tengelypárhuzamos egyenesen legfeljebb két pontot tartalmaz, és $H \setminus \{q\}$ minden pontját lefedik a K által meghatározott tengelypárhuzamos szakaszok. Állítjuk, hogy ugyanez a K halmaz H-hoz is megfelelő. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy q rajta van egy K-beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakaszon. Vizsgáljuk a p pontot! Mivel p egy függőleges egyenes H-beli legalsó vagy legfelső pontja, azért vagy $p \in K$, vagy p egy K-végpontú vízszintes szakaszon található, tehát q vízszintes egyenesén van p-től balra K-nak pontja. Hasonlóan, ha $r \notin K$, akkor r is csak egy K meghatározta vízszintes szakaszon lehet, így K-nak r-től jobbra is van pontja. Azt kaptuk, hogy q csakugyan egy K végpontú vízszintes szakasz belsejében van, tehát K valóban megfelel a feladat feltételeinek, vagyis az állítás $n+1$ pontú halmazokra is igaz. Ezzel az indukciós lépést igazoltuk, a bizonyítást befejeztük. $\square$

Megjegyzések. 1. A 2. megoldásból úgy kaphatunk hatékony algoritmust a K halmaz keresésére, hogy első lépésben képezzük a K^* halmazt. Ha K^* nem alkalmas K-nak a bizonyításbeli q pontja miatt, akkor a $H \setminus \{q\}$ halmazra rekurzívan meghívjuk ugyanezt az algoritmust. Így legfeljebb $|H|-1$ alkalommal képezve a megfelelő K^* halmazt, előbb-utóbb egy keresett K-t kapunk. (Az is könnyen látható, hogy nem kell egyenként elhagyni a q pontokat: megtehetjük azt is, hogy H-ból egyszerre hagyjuk el K^* összes olyan pontját, ami K^*-beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakasz belsejében van. Így az algoritmus gyorsabban végetér.)

2. Több hamis bizonyítás érkezett a feladatra. Legtöbbjük módszeréből az is következne, hogy tetszőleges H halmazhoz egyértelműen létezik a keresett K. A *példa* mutatja, hogy ez korántsem sincs így.



3. Érdekes tulajdonsága a fenti megoldásokban konstruált K halmaznak, hogy ha egy K' halmaz rendelkezik a feladatbeli (a) és (b) tulajdonságokkal, akkor minden K'-beli végpontokkal rendelkező függőleges szakasz része egy K meghatározta függőleges szakasznak, továbbá minden K meghatározta vízszintes szakasz része egy K'-beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakasznak. Más szóval K a „legmagasabb” és egyben „legkeskenyebb” a kívánt tulajdonságú halmazok között. Természetesen ha a 90°-kal elforgatott ábrán végezzük el a konstrukciót (azaz a függőleges és vízszintes szavakat felcseréljük a bizonyításban), akkor a „legalacsonyabb” és „legszélesebb” megoldást kapjuk meg.

4. A feladat szoros rokonságot mutat *Gale* és *Shapley* (sajnos nem eléggé) ismert „stabil házassági” tételével.