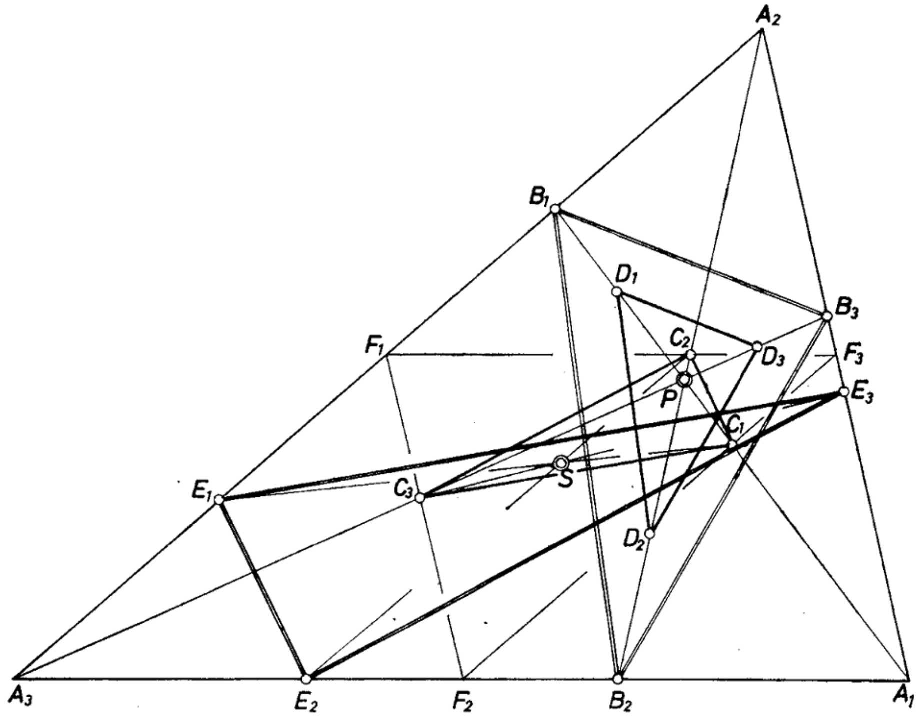
I. megoldás. Először olyan P pontok esetére igazoljuk az állítást, amelyek az $A_1A_2A_3$ háromszög $F_1F_2F_3$ középháromszögének belsejében vannak (F_1 felezi az A_2A_3 oldalt s í. t.). Ekkor P rajta van mindegyik B_iC_i szakaszon, és mint könnyen belátható, benne van mind a $C_1C_2C_3$, mind a $D_1D_2D_3$ háromszögben, ezek területeit a PC_i, PD_i szakaszok úgy osztják részekre, hogy a 3-3 rész területének összege az illető háromszög t_C, t_D területét adja.



1. ábra

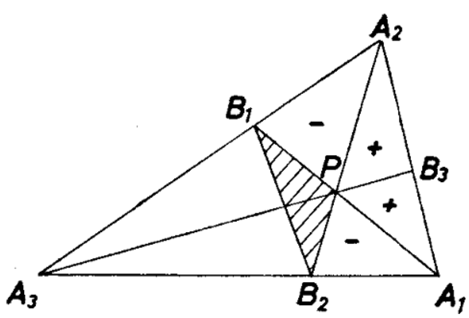
A háromszög t területének $2t = ab\sin\gamma$ típusú képletét használva, $\dfrac{2t}{\sin\gamma}$ típusú kifejezéseket fejezünk ki 2–2 szakasz szorzatával, és fordítva, az átalakítás során kapott szorzatokat ilyen kifejezésekre értelmezünk át. Mindegyik indexre C_i értelmezése alapján

$$\begin{aligned}2PC_i &= PC_i + PA_i - C_iA_i, = PC_i + PA_i - B_iC_i = \\ &= PC_i + PA_i - (B_iP + PC_i) = PA_i - B_iP,\end{aligned}$$

ennélfogva $1/\sin C_1PC_2\sphericalangle = k$ rövidítéssel, majd felhasználva, hogy $t_{PA_1A_2} = t_{PA_1B_3} + t_{PB_3A_2}$ írhatjuk:

$$\begin{aligned}\frac{8t_{PC_1C_2}}{\sin C_1PC_2\sphericalangle} &= 2PC_1 \cdot 2PC_2 = (PA_1 - B_1P)(PA_2 - B_2P) = \\ &= k\cdot 2t_{PA_1B_3} + k\cdot 2t_{PB_3A_2} - k\cdot 2t_{PA_3B_1} - k\cdot 2t_{PB_2A_1} + k\cdot 2t_{PB_1B_2},\end{aligned}$$

azaz $4t_{PC_1C_2}$-t úgy kapjuk, hogy $t_{PB_1B_2}$-höz hozzávesszük a 2. ábra szerint $+$, ill. $-$ jellel jelölt területeket.



2. ábra

Innen az indexek ciklikus permutációjával hasonló kifejezéseket írhatunk fel $4t_{PC_2C_3}$-ra és $4t_{PC_3C_1}$-re, és e három egyenlőség összegében a 6-6 db $+$ és $-$ jelű tag összege egyaránt az eredeti háromszög területe. Így továbbalakítással

$$4t_{C_1C_2C_3} = t_{B_1B_2B_3} = 4t_{D_1D_2D_3},$$

hiszen a másik vizsgálandó háromszög, $D_1D_2D_3$ a $B_1B_2B_3$-ból P centrumú, 1/2 arányú kicsinyítéssel adódik. Ezzel az állítást P említett felvételének esetére bebizonyítottuk. Hasonlóan bizonyíthatunk P más figyelembe veendő helyzetei mellett is.

II. megoldás. A $D_1D_2D_3$ háromszöget a P centrumból kétszeresére nagyítva, a $B_1B_2B_3$ háromszöget kapjuk. Jelöljük az $A_1A_2A_3$ háromszög súlypontját S-sel, a C_i pontnak S-re vonatkozó (-2) arányú centrális hasonlóságból származó képét E_i-vel ($i = 1,\ 2,\ 3$). A feladat állítása nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy a $B_1B_2B_3$ és $E_1E_2E_3$ háromszögek területe egyenlő, ezt fogjuk igazolni.

Mivel C_1 rajta van az F_2F_3 középvonalon, és ezt a mondott hasonlóság A_2A_3-ba viszi, E_1 rajta van az A_2A_3 oldalon. Ezen túlmenően

$$A_3E_1 = 2F_3C_1 = A_2B_1$$

is igaz, és hasonlóan kapjuk, hogy E_2 az A_1A_3 oldalnak az a pontja, melyre $A_1E_2 = A_3B_2$, E_3 pedig az A_2A_1 oldalon van, és $A_2E_3 = A_1B_3$. Mivel az $A_1A_2A_3$, $B_1A_2B_3$ háromszögek egyik szöge közös, területeik aránya megegyezik közös szögükre támaszkodó oldalaik szorzatainak arányával. A $B_2A_3B_1$, $B_3A_1B_2$ háromszögek területét hasonlóan átalakítva, és általában az XYZ háromszög területét T_{XYZ}-vel jelölve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{T_{B_1B_2B_3}}{T_{A_1A_2A_3}} &= 1 - \frac{B_1A_2 \cdot A_2B_3}{A_1A_2 \cdot A_2A_3} - \frac{B_2A_3 \cdot A_3B_1}{A_2A_3 \cdot A_3A_1} - \frac{B_3A_1 \cdot A_1B_2}{A_3A_1 \cdot A_1A_2} = \\ &= 1 - \lambda_1(1-\lambda_3) - \lambda_2(1-\lambda_1) - \lambda_3(1-\lambda_2),\end{aligned}$$

ahol

$$\lambda_1 = \frac{B_1A_2}{A_3A_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{B_2A_3}{A_1A_3}, \qquad \lambda_3 = \frac{B_3A_1}{A_2A_1}.$$

Mivel $A_3E_1 = A_2B_1$, $A_1E_2 = A_3B_2$, $A_2E_3 = A_1B_3$, ugyanazt kapjuk az $E_1E_2E_3$ háromszögre is:

$$\begin{aligned}\frac{T_{E_1E_2E_3}}{T_{A_1A_2A_3}} &= 1 - \frac{E_1A_2 \cdot A_2E_3}{A_1A_2 \cdot A_2A_3} - \frac{E_2A_3 \cdot A_3E_1}{A_2A_3 \cdot A_3A_1} - \frac{E_3A_1 \cdot A_1E_2}{A_3A_1 \cdot A_1A_2} = \\ &= 1 - (1-\lambda_1)\lambda_2 - (1-\lambda_2)\lambda_3 - (1-\lambda_3)\lambda_1.\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk a $B_1B_2B_3$ és $E_1E_2E_3$ háromszögek területének egyenlőségét.

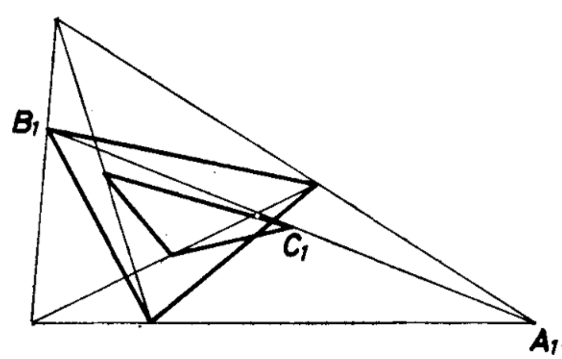
Megjegyzések. 1. Az $A_3E_1 = A_2B_1$, $A_1E_2 = A_3B_2$, $A_2E_3 = A_1B_3$ összefüggések azt jelentik, hogy E_i a B_i-nek az F_i-re vonatkozó tükörképe ($i = 1, 2, 3$). Mint megoldásunk második felében beláttuk, ebből következik, hogy tetszőleges B_1, B_2, B_3 pontok esetén egyenlő a $B_1B_2B_3$, $E_1E_2E_3$ háromszögek területe. Ez az állítás megtalálható példaként *Reiman István:* Vektorok a geometriában című Középiskolai Szakköri Füzetben (Tankönyvkiadó, Budapest, 1971) a 94. oldalon.

2. Nem használtuk ki lényegesen P-nek az $A_1A_2A_3$ háromszöghöz képest elfoglalt helyzetét, ezért az állítás a sík bármely P pontjából kifejlesztett alakzatra érvényes.

3. Általánosabban is igaz az állítás: Legyen B_i az $A_1A_2A_3$ háromszög A_i-vel szemközti oldalának belsõ pontja, az A_iB_i szakaszok felezőpontja C_i. Ekkor

$$T_{C_1C_2C_3} = \frac{1}{4}T_{B_1B_2B_3},$$

azaz nem szükséges, hogy az A_iB_i szakaszok egy ponton menjenek át.



3. ábra

Pintér Ferenc (Budapest, Leövey K. Gimn., IV. o. t.)