

## I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{2x^2 - 10x + 9}{x^2 - 4x - 12} = \frac{x^2 - x - 9}{(x - 6)(x + 2)}. \quad (11 \text{ pont})$$

**Megoldás.** A két nevező egyenlő. A feladat értelmezési tartománya:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 6\}$ . A számlálónak is egyenlőnek kell lenni:  $2x^2 - 10x + 9 = x^2 - x - 9$ . A következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 - 9x + 18 = 0.$$

A gyökök:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 6$ . A feladat megoldása az  $x_1 = 3$ , mert csak ez van benne az értelmezési tartományban.

2. Az  $ABC$  háromszög oldalainak hossza 26, 28 és 30.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög hegyesszögű!

b) Mekkora a háromszög leghosszabb magassága?

c) Az  $ABC$  háromszög síkjával párhuzamos síkban van egy  $A'B'C'$  háromszög, amely az  $ABC$  háromszöghöz középpontosan hasonló, a hasonlóság aránya 0,5. A két párhuzamos sík távolsága 12. Mennyi az  $ABCA'B'C'$  test térfogata? (12 pont)

**Megoldás.** a) Számoljuk ki az  $ABC$  háromszög leghosszabb oldalával szemközti, legnagyobb  $\gamma$  szögét. Írjuk föl a koszinusz-tételt a  $\gamma$  szögre:

$$30^2 = 26^2 + 28^2 - 2 \cdot 26 \cdot 28 \cdot \cos \gamma,$$

amiből  $\cos \gamma \approx 0,3846$ . Vagyis a háromszög legnagyobb szöge hegyes ( $\gamma \approx 67,4^\circ$ ), így a háromszög hegyesszögű.

b) Számoljuk ki az  $ABC$  háromszög területét. A Heron-képlet szerint

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol  $s$  a háromszög területének felét, az  $a, b, c$  pedig a háromszög oldalainak a hosszát jelenti. Vagyis  $T = \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = 336$ . A leghosszabb  $m_a$  magasság a legrövidebb oldalhoz tartozik. Ezzel felírva a területet:

$$336 = \frac{26 \cdot m_a}{2}, \quad \text{amiből} \quad m_a = \frac{336}{13} \approx 25,83.$$

c) Az  $ABC$  háromszög területe  $T = 336$ . A hozzá hasonló háromszög területe:  $t = \frac{1}{4} \cdot 336 = 84$ , mivel a hasonlóság aránya 0,5, és a terület a hasonlóság arányának négyzetével arányos.

A kérdéses test egy csonkagúla, írjuk fel a térfogatát:

$$V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t) = \frac{12}{3} \cdot (336 + \sqrt{336 \cdot 84} + 84) = 2352.$$

3. a) Hány olyan négyjegyű szám van, amely osztható 3-mal és 9-re végződik?

b) Ha egy számtani sorozat első 51 darab páratlan sorszámú elemének összegéből kivonjuk az első 50 darab páros sorszámú elemének összegét, különbségként 2007-et kapunk. Ha ugyanennek a számtani sorozatnak az első 50 darab páros sorszámú elemének összegéből kivonjuk az első 50 darab páratlan sorszámú elemének összegét, akkor pedig 2000 a különbség. Határozzuk meg a sorozat 101. elemét. (14 pont)

**Megoldás.** a) A 9-re végződő négyjegyű szám akkor osztható 3-mal, ha a 9 előtt levő háromjegyű szám osztható 3-mal. 900 háromjegyű szám van, és ezek közül minden harmadik, azaz 300 darab osztható 3-mal.

Vagyis 300 darab olyan négyjegyű szám van, amely osztható 3-mal és 9-re végződik.

b) Legyen a számtani sorozat első eleme  $a$ , a differenciája  $d$ .

Az első 51 darab páratlan sorszámú elemének összege:  $51a + 2550d$ .

Az első 50 darab páros sorszámú elemének összege:  $50a + 2500d$ .

Az első 50 darab páratlan sorszámú elemének összege:  $50a + 2450d$ .

A szöveg szerint:

$$\begin{aligned} (51a + 2550d) - (50a + 2500d) &= a + 50d = 2007, \\ \text{és} \quad (50a + 2500d) - (50a + 2450d) &= 50d = 2000. \end{aligned}$$

Vagyis  $d = 40$ ,  $a = 7$ . A sorozat 101. eleme az  $a + 100d = 7 + 100 \cdot 40 = 4007$ .

4. Mekkora szögben látszik a  $PQ$  szakasz az  $y = x^2 - 2x - 2$  egyenlettel megadott alakzat  $P(-1; 1)$  és  $Q(2; -2)$  pontjában húzott érintők metszéspontjából? Adjuk meg az érintők metszéspontjának koordinátáit. (14 pont)

**Megoldás.** Az érintő meredekségét az első derivált adja:

$$(x^2 - 2x - 2)' = 2x - 2.$$

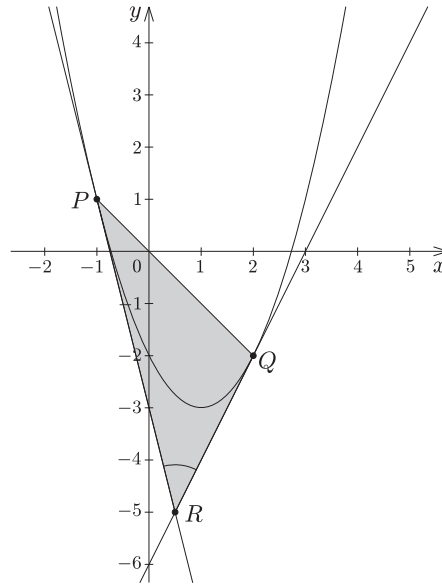
A  $P$  pontra illeszkedő érintő meredeksége  $-4$ , a  $Q$  pontra illeszkedő érintő meredeksége  $2$ . A  $P$ -re illeszkedő érintő egyenlete:

$$e_P: y - 1 = -4(x + 1),$$

azaz  $y = -4x - 3$ . A  $Q$ -ra illeszkedő érintő egyenlete:

$$e_Q: y + 2 = 2(x - 2),$$

azaz  $y = 2x - 6$ . Vagyis a két érintő metszéspontja:  $R\left(\frac{1}{2}; -5\right)$ .



A  $PQR$  háromszög oldalainak hosszát kiszámítjuk a csúcsok koordinátáiból:  $RQ = \sqrt{11,25}$ ,  $RP = \sqrt{38,25}$ ,  $PQ = 3\sqrt{2}$ . Írjuk fel a koszinusz-tételt a kérdéses szögre:

$$18 = 11,25 + 38,25 - 2 \cdot \sqrt{11,25} \cdot \sqrt{38,25} \cdot \cos \varphi,$$

ahonnan  $\cos \varphi \approx 0,7593$ , vagyis  $\varphi \approx 40,6^\circ$ .

## II. rész

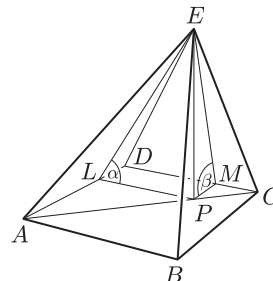
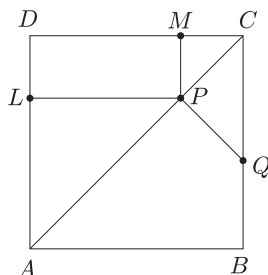
**5.** Legyen  $P$  az  $ABCD$  négyzet  $AC$  átlójának az a pontja, amelyre  $AP = AB = 1$ . Az  $AC$  átlóra a  $P$  pontban állított merőleges egyenes a  $BC$  oldalt a  $Q$  pontban metszi. Az  $ABCD$  sík  $P$  pontjában a síkra állított merőleges egyenesre mérjük fel a  $PE = 1$  távolságot.

a) Igazoljuk, hogy az  $ABQP$  négyszög deltoid.

b) A deltoid területe hányadrésze a négyzet területének?

c) Számítsuk ki az  $ABCDE$  gúla oldallapjainak az alaplap síkjával bezárt hajlásszögét. (16 pont)

**Megoldás.** a) A feltétel szerint  $AP = AB = 1$  és  $AC = \sqrt{2}$ , azért  $PC = \sqrt{2} - 1$ . A  $CPQ$  derékszögű háromszögben a  $C$ -nél  $45^\circ$  van, ezért  $PQ = PC = \sqrt{2} - 1$ . A  $CPQ$  derékszögű háromszög átfogójának hossza:  $CQ = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$ . Ebből következik, hogy  $BQ = CB - CQ = 1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ . Vagyis  $AP = AB$ , valamint  $BQ = PQ$ , így az  $ABQP$  négyszög valóban deltoid.



b) Az  $ABCD$  négyzet területe 1. Mivel az  $ABQP$  négyszög derékszögű deltoid, azért területe:  $t = AB \cdot BQ = 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 0,41$ . Ennyire része a deltoid területe a négyzet területének.

c) Két-két oldallal hajlásszöge megegyezik, így két szöveget kell kiszámítanunk. A  $P$  pontból az  $AD$  élre állított merőleges talppontja legyen  $L$ , a  $DC$  élre állított merőlegesé pedig  $M$ . Az  $APL$  és a  $PCM$  egyenlő szárú derékszögű háromszögek felhasználásával:  $LP = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $MP = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ . A keresett  $\alpha$ , illetve  $\beta$  szögek az  $LPE$  és az  $MPE$  derékszögű háromszögekből határozhatók meg:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}, & \text{vagyis} & \quad \alpha \approx 54,74^\circ, \\ \text{és} \quad \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}, & \text{vagyis} & \quad \beta \approx 73,68^\circ. \end{aligned}$$

**6.** A  $10^n + 14^n + 15^n + 21^n$  kifejezésben az  $n$  3-mal osztható pozitív páratlan<sup>1</sup> egész számot jelöl.

a) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen  $n$  esetén osztható lesz 1260-nal.

b) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható? (16 pont)

**Megoldás.** a) Alakítsuk át a négytagú kifejezést:

$$10^n + 14^n + 15^n + 21^n = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot 7^n + 3^n \cdot 5^n + 3^n \cdot 7^n = (2^n + 3^n)(5^n + 7^n).$$

Legyen  $n = 3k$ , ahol  $k$  páratlan pozitív egész számot jelöl. Ekkor

$$(2^n + 3^n)(5^n + 7^n) = (2^{3k} + 3^{3k})(5^{3k} + 7^{3k}) = (8^k + 27^k)(125^k + 343^k).$$

Mivel a kitevők páratlan számok, azért  $35 \mid 8^k + 27^k$  és  $468 \mid 125^k + 343^k$ . A 468 osztható 36-tal, és  $(35; 36) = 1$ , ezért a kifejezés osztható  $35 \cdot 36 = 1260$ -nal.

b) A négytagú összeg két tagját hatféleképpen választhatjuk ki. Mivel a kitevők páratlan számok, azért az összeg osztható lesz az alapok összegével. Az alapok összege a következő hat érték közül kerülhet ki: 24, 25, 31, 29, 35, 36. Ezek közül két szám osztható hárommal, vagyis két esetben biztosan 3-mal osztható az összeg. A további négy esetben nem kaphatunk 3-mal osztható számot, mert a kéttagú összeg egyik tagja osztható 3-mal, a másik pedig nem. Így a keresett valószínűség  $\frac{1}{3}$ .

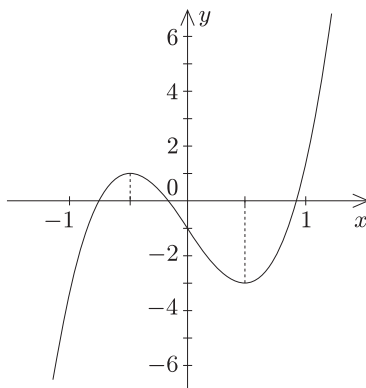
**7.** Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$  hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb:  $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$ . (16 pont)

**Megoldás.** Tudjuk, hogy  $f(x)$  mindenütt folytonos függvény. Mivel az

$$f'(x) = 24x^2 - 6$$

függvény zérushelyei a  $-\frac{1}{2}$  és az  $\frac{1}{2}$ , azért itt lehet az eredeti függvénynek lokális szélsőértéke. Ezek a helyeken az első derivált előjelet vált (pozitívból negatívba, illetve negatívból pozitívba megy át), így az első helyen lokális maximuma, a második helyen lokális minimuma van a függvénynek. Számolással kapjuk, hogy  $f(-0,5) = 1$  és  $f(0,5) = -3$ . Vagyis a  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  intervallumon van zérushelye a függvénynek.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x$
$f$	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$
$f'$	+	0	-	0	+



<sup>1</sup>A „páratlan” szó múlt havi feladatsorunkban kimaradt, ettől a feladat pontatlanná vált. A hibáért elnézést kérünk.

Mivel  $\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^3 - 6x - 1) = \infty$ , azért az  $\left] \frac{1}{2}; \infty \right[$  intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Mivel  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^3 - 6x - 1) = -\infty$ , azért a  $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right]$  intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Azaz van három különböző zérushelye.

Mivel  $f(0) = -1$ , azért a középső zérushelyről az is megállapítható, hogy a  $\left] -\frac{1}{2}; 0 \right]$  intervallumon található. Ez azt jelenti, hogy két negatív és egy pozitív zérushellyel rendelkezik a függvény. Tudjuk, hogy  $\cos \frac{\pi}{9} > 0$ , ezért ha az  $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$  valóban zérushelye a függvénynek, akkor az a három zérushely közül csakis a legnagyobb lehet.

A  $\frac{\pi}{9}$  háromszorosa  $\frac{\pi}{3}$ , ami nevezetes szög. Tudjuk, hogy  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ . Alkalmazzuk a  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$  összefüggést:

$$\cos \frac{\pi}{3} = 4 \cos^3 \frac{\pi}{9} - 3 \cos \frac{\pi}{9}.$$

Ezt 2-vel szorozva és rendezve kapjuk:

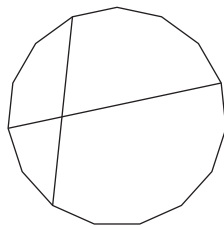
$$8 \cos^3 \frac{\pi}{9} - 6 \cos \frac{\pi}{9} - 1 = 0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az  $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$  hozzárendelésű függvénynek az  $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$  a zérushelye.

**8. a)** Egy szabályos sokszöget két átlójával négy síkidomra vágunk: négyszögre, ötszögre, hatszögre és nyolcszögre. Hány oldala van a szabályos sokszögnek?

**b)** Egy szabályos tizenöt szög csúcsait pirosra, a belsejében pedig néhány pontot zöldre színeztünk. Az így kapott színes pontokat minden lehetséges módon páronként összeköttöttük egy-egy szakasszal. Azon szakaszok száma, amelyeknek a végpontjai azonos színűek megegyezik azon szakaszok számával, amelyeknek a két végpontja nem azonos színű. Hány darab zöld pontot vettünk fel a sokszög belsejében? (16 pont)

**Megoldás.** **a)** A feladatban szereplő két átló metszi egymást. Az átlók egy-egy darabja oldala lesz a keletkezett sokszögeknek. Mind a négy sokszögben két-két oldal az átlók egy-egy darabja lesz. Ezért a négyszögnek kettő, az ötszögnek három, a hatszögnek négy, a nyolcszögnek pedig hat olyan oldala van, amely az eredeti sokszögnek is oldala. Az eredeti sokszög minden oldala szerepel valamelyik keletkező sokszög oldalaként. Ezért az eredeti sokszögnek  $2 + 3 + 4 + 6$ , azaz 15 oldala van.



**b)** Legyen a zöld pontok száma  $n$ . A piros végű szakaszok száma  $\binom{15}{2}$ , a zöld végű szakaszok száma  $\binom{n}{2}$ . Azon szakaszok száma, amelyeknek az egyik vége piros, a másik pedig zöld,  $15n$ . Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\binom{n}{2} + \binom{15}{2} = 15n, \quad \text{azaz} \quad \frac{n(n-1)}{2} + \frac{15 \cdot 14}{2} = 15n.$$

Rendezzük az egyenletet:  $n^2 - 31n + 210 = 0$ . A két gyök:  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 21$ . Vagyis a zöld pontok száma 10 vagy 21.

**9.** Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{(7+4\sqrt{3})^x} + \sqrt{(7-4\sqrt{3})^x} = \frac{5}{2}. \quad (16 \text{ pont})$$

**Megoldás.** Alakítsuk át az egyenletet, felhasználva, hogy  $(2 + \sqrt{3})^2 = (7 + 4\sqrt{3})$  és hasonlóképpen  $(2 - \sqrt{3})^2 = (7 - 4\sqrt{3})$ :

$$\sqrt{(2 + \sqrt{3})^{2x}} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^{2x}} = \frac{5}{2}, \quad \text{innen} \quad (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = \frac{5}{2}.$$

Legyen  $(2 + \sqrt{3})^x = a$ , ekkor  $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{a}$ .

Megoldjuk az  $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$  egyenletet, amit  $2a$ -val szorozva és rendezve kapjuk, hogy:

$$2a^2 - 5a + 2 = 0.$$

A gyökök:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ .

A  $(2 + \sqrt{3})^x = 2$  egyenletből kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{\lg 2}{\lg (2 + \sqrt{3})} \approx 0,5263.$$

A  $(2 + \sqrt{3})^x = \frac{1}{2}$  egyenletből kapjuk, hogy

$$x_2 = \frac{\log \frac{1}{2}}{\lg (2 + \sqrt{3})} = -\frac{\lg 2}{\lg (2 + \sqrt{3})} \approx -0,5263.$$