

I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \quad \sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4} = \log_2 \frac{4}{x} \quad (6 \text{ pont})$$

$$b) \quad \sqrt{5 - \cos^2 x - 4 \sin x} = 2 - \sin x \quad (6 \text{ pont})$$

2. Egy kocsmáros kiszámította, hogy ha a 60%-os alkoholjához hozzáönt 12 liter vizet, akkor 42%-os alkoholként árulhatja azt.

a) Hány liter volt az eredeti 60%-os alkohol? (6 pont)

b) A nagyobb nyereség reményében a kocsmáros nem 12, hanem 16 liter vizet öntött az eredeti alkoholhoz. A kocsmáros azt tapasztalta, hogy a 42%-os alkohol esetében a $\pm 2\%$ -os eltérést műszer nélkül még nem fedezik fel a fogyasztók, de az annál nagyobb eltérést már igen. Észreveszik-e a vendégek a csalást? (6 pont)

3. Egy felmérés során megkérdeztek 52 családot a családban élő gyerekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét a *táblázat* mutatja.

		Fiúk száma					
		0	1	2	3	4	5
Lányok száma	0	6	1	2	2	1	0
	1	2	3	2	1	2	1
	2	4	3	2	1	3	1
	3	3	2	2	1	1	0
	4	1	1	1	1	0	0
	5	0	1	0	1	0	0

(Tehát pl. olyan család, melyben egyetlen gyermek sincs 6 db volt, míg olyan, amelyben egy fiú és két lány, 3 volt.)

a) Átlagosan hány gyermek van egy családban? (5 pont)

b) Összesen hány fiú és hány lány van a megkérdezett családokban? (4 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztva 2 családot a megkérdezettek közül, mekkora annak a valószínűsége, hogy e két család mindegyikében legalább 3 gyermek van? (4 pont)

4. A háromkötetes irodalmi lexikont kötetenként is meg lehet vásárolni. Egy alkalommal azt vizsgálták egy könyvesboltban egy héten át, hogy az egyes kötetekből az egyes napokon hány darab fogyott. A vizsgálat eredményét szemlélteti a *táblázat*.

	hétfő	kedd	szerda	csüt.	pént.	szomb.
I. kötet	2	1	4	2	4	2
II. kötet	3	2	2	1	0	2
III. kötet	5	3	4	6	3	3

Négy olyan vásárló volt, aki mindhárom kötetet megvette (egy kötetből senki sem vásárolt több példányt.) Azok közül, akik megvásárolták az első kötetet, 6-an voltak olyanok, akik nem vették meg a másodikat, és szintén 6-an voltak, akik nem vették meg a harmadik kötetet.

a) Ha olyan vásárló nem volt, aki csak a második kötetet vette meg, akkor hányan vannak azok, akik csak a harmadik kötetet vették meg? (6 pont)

b) Hány olyan vásárló volt a héten, aki vásárolt az irodalmi lexikonokból? (3 pont)

c) Mindhárom kötet ára egységesen 3600 Ft. Aki két kötetet vásárolt, az az egyik megvásárolt kötetre kapott 10% kedvezményt. Aki mindhárom kötetet megvette, az az egyik megvásárolt kötetre 10%, egy másik megvásárolt kötetre pedig 20% kedvezményt kapott. Mennyi volt a bolt bevétele e kötetek után ezen a héten? (5 pont)

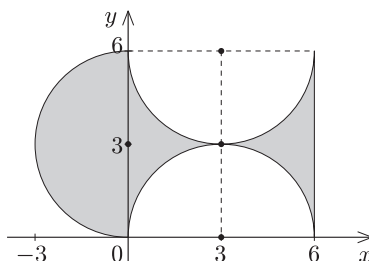
II. rész

5. Egy forgástest alakú díszítőelem tengelymetszetét látjuk az *ábrán* egy koordinátarendszerben elhelyezve. A síkmetszetet határoló görbék:

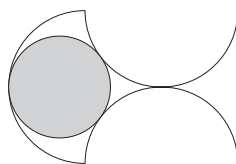
$$\begin{aligned}x^2 + (y - 3)^2 &= 9 \quad (x \leq 0), \\(x - 3)^2 + y^2 &= 9 \quad (y \geq 0), \\(x - 3)^2 + (y - 6)^2 &= 9 \quad (y \leq 6)\end{aligned}$$

a) Mekkora a síkmetszet területe?

(6 pont)



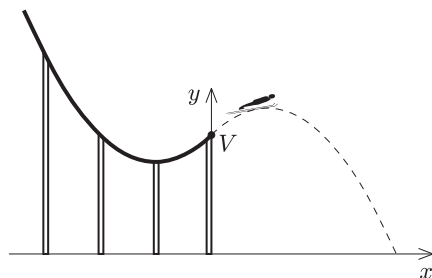
b) A forgástestbe – hogy stabilabb legyen – egy olyan gömböt helyeztek, mely nem tud elmozdulni. (Ez a síkmetszeten egy olyan főkör, mely két félkört kívülről, egyet pedig belülről érint.) Mekkora e gömb sugara? (10 pont)



6. Az *ábrán* egy sisánc lesikló pályáját látjuk egy koordinátarendszerhez rögzítve. A sánc az

$$f(x) = \frac{4}{250}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{322}{5}$$

függvény grafikonjához illeszkedik, ahol az x tengely az 1000 m-es tengerszint feletti magasságon; a sánc V végpontja az y tengelyen van. Az egyik síelő a V pontot elhagyva egy olyan parabola-pályán repül tovább, mely a sáncnak megfelelő parabola V -re vonatkozó tükörképe.



a) A tengerszinthez képest milyen magassáig repül fölfele a síelő?

(4 pont)

b) A sánc V végpontját tartalmazó tartóoszloptól milyen távol éri el az 1000 m-es tengerszint feletti magasságot a síelő?

(6 pont)

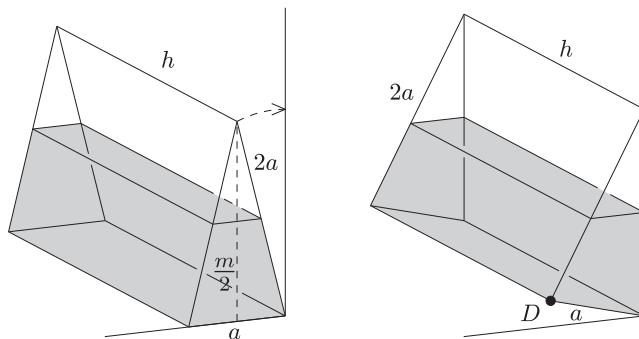
c) Írja fel a síelő röppályája érintőjének egyenletét a sánc elhagyásának pillanatában.

(6 pont)

7. Egy egyenes hasáb alapja olyan egyenlő szárú háromszög, melynek szára az alap kétszerese. A hasáb a háromszög alapjára illeszkedő oldallapján fekszik a földön a fal mellett, és ilyen helyzetben magasságának feléig megtöltöttük vízzel (lásd bal oldali *ábra*), a test falának vastagsága elhanyagolható.

a) Milyen magasan áll a víz a testben, ha azt elforgatva a falnak támasztjuk (lásd jobb oldali *ábra*)?

(8 pont)



b) A test D csúcsában van egy dugó. Miután a hasábot a leírt módon a falnak támasztottuk, kihúztuk a dugót, ahonnan a víz 12 liter/perc átlagos sebességgel folyik ki a testből. Mennyi ideig folyik a víz, ha $a = 1$ m, $h = 4$ m? (8 pont)

8. a) Egy számtani sorozat első tagja \overline{ab} , második tagja \overline{ba} (kétjegyű számok), harmadik tagja az \overline{acb} háromjegyű szám. Mekkora e sorozat differenciája? (9 pont)

b) Legyenek a_n és b_n pozitív egészekből álló, nem állandó számtani sorozatok. Igazoljuk, hogy $a_{b_n} - b_{a_n}$ n -től független állandó. (7 pont)

9. a) Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:

$$\sqrt{x^2 - 15x + 36} + \sqrt{-x^2 + 19x - 84} + \log_{\frac{x}{2}} 36. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Mely x, y, z valós számok elégítik ki az alábbi egyenletet?

$$\sqrt{x^2 - 15x + 36} + \sqrt{-x^2 + 19x - 84} + \log_{\frac{x}{2}} 36 = 2 \cos 3z - y^2 + 4y - 4. \quad (10 \text{ pont})$$