I. rész

1. *Határozzuk meg azokat az a, b, c egész számokat, melyekre teljesül a következő két tulajdonság:*
i) A három szám összege fele a szorzatuknak;
ii) Az egyik szám egyenlő a másik kettő összegével. (*11 pont*)

Megoldás. Feltehetjük, hogy $a = b + c$, így $2(a + b + c) = 4a = abc$, azaz

$$a(bc - 4) = 0.$$

I. eset: $a = 0$. Ekkor $b = -c$ (c tetszőleges egész).
II. eset: $bc = 4$. Vagyis a 4-et kell két egész szám szorzataként előállítanunk. Ekkor a megoldások:

$$\begin{array}{llllll} a=5, & b=4, & c=1; & a=-5, & b=-4, & c=-1; \\ a=5, & b=1, & c=4; & a=-5, & b=-1, & c=-4; \\ a=4, & b=2, & c=2; & a=-4, & b=-2, & c=-2. \end{array}$$

2. *Két, egy síkban haladó repülőgép repülési pályája két, egymásra merőleges egyenes. Egy adott pillanatban pályájuk képzeletbeli metszéspontjától az egyik repülőgép* 2 km, *a másik* 2,5 km *távolságban van. Az előbbi gép sebessége* 270 km/h, *a másiké* 180 km/h. *A gépek vészjelzője figyelmezteti a pilótákat, ha* 1 km-*nél jobban megközelítik egymást.*
a) Határozzuk meg, hány másodperc múlva lesz a két repülőgép távolsága minimális. (*9 pont*)
b) Megszólal-e a vészjelző a repülőgépeken? (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Tegyük fel, hogy a gépek a metszéspont felé közelítenek. Az egyik gép sebessége 75 m/s, a másiké 50 m/s. Pályáik metszéspontjától t másodperc elteltével az egyik gép $2000 - 75t$, a másik $2500 - 50t$ méter távolságban lesz. A két gép távolsága:

$$d = \sqrt{(2000 - 75t)^2 + (2500 - 50t)^2},$$

aminek a minimumát keressük. Ez akkor minimális, amikor

$$d^2 = 8\,125\, t^2 - 550\,000\, t + 10\,250\,000$$

minimális. A kifejezés minimumhelye: $t = \dfrac{550\,000}{2 \cdot 8\,125} \approx 33{,}85$ másodperc. (Ekkor az első gép már túl lesz az útvonalak metszéspontján.)

b) A kapott t értéket behelyettesítve a távolságképletbe kapjuk, hogy a két gép minimális távolsága 971 méter, tehát a vészjelzők megszólalnak.

3. *Egy nem állandó számtani sorozat első három eleme közül a másodikat és a harmadikat felcserélve egy mértani sorozat első három elemét kapjuk. A számtani sorozat első eleme egyenlő a második és a harmadik elem szorzatának ellentettjével. Határozzuk meg a számtani sorozatot.* (*14 pont*)

Megoldás. A számtani sorozat első elemét a-val, differenciáját d-vel jelölve a számtani sorozat elemei sorban a, $a + d$ és $a + 2d$; a mértani sorozaté pedig sorban a, $a + 2d$ és $a + d$. A mértani sorozat tulajdonsága szerint: $\dfrac{a+d}{a+2d} = \dfrac{a+2d}{a}$. Ezt átalakítva adódik, hogy $a = -\dfrac{4}{3}d$ ($d \neq 0$).

A második feltétel szerint $a = -(a + d)(a + 2d)$. Behelyettesítve az a-ra kapott kifejezést kapjuk, hogy $d = -6$ és $a = 8$.

A keresett számtani sorozat tehát $a_n = 8 - (n - 1) \cdot 6$, ami valóban megfelel a feltételeknek.

4. *Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze*
a) egy ötfős csoportot; (*2 pont*)
b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot; (*4 pont*)
c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie; (*4 pont*)
d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) $\dbinom{30}{5} = 142\,506$.

b) $\dbinom{30}{5} + \dbinom{30}{4} + \dbinom{30}{3} + \dbinom{30}{2} = 174\,406$.

c) Ekkor a maradék 29 diákból kell négyet választanunk: $\dbinom{29}{4} = 23\,751$.

d) Az első kérdésnél kapott eredményt szorozzuk 5-tel, hiszen az öt tag közül bármelyikük lehet a csoportvezető: $\dbinom{30}{5} \cdot 5 = 712\,530$.

II. rész

5. *Egy egyenes körkúp alakú edény alapkörének sugara* 12 cm, *magassága* 18 cm. *Az edényt csúcsára állítjuk, és* 1 *liter vizet töltünk bele.*

a) Milyen magasan áll benne a víz? *(8 pont)*

b) Mennyi festékre lenne szükség az edény külső falának befestéséhez, ha 1 *liter festék* 8 m^2 *felületre elegendő?* *(8 pont)*

Megoldás. *a*) A betöltött víz által elfoglalt rész hasonló az edényhez, tehát egy olyan egyenes körkúp, melynek magassága másfélszerese az alapkör sugarának. Sugarát ϱ-val jelölve

$$1000=\frac{\varrho^2\pi\cdot 1{,}5\varrho}{3},\quad \text{ahonnan}\quad 1{,}5\varrho=1{,}5\cdot\sqrt[3]{\frac{3000}{1{,}5\pi}}\approx 12{,}9\text{ cm}.$$

Tehát a víz kb. 12,9 cm magasan áll benne.

b) A kúppalást felszínét kell kiszámolnunk. Pitagorasz tételéből a kúp alkotója: $a\approx 21{,}63$ cm. A kúppalást felszíne: $A=r\pi a\approx 815{,}43\text{ cm}^2$.

Mivel 1000 cm^3 festék 80 000 cm^2 felület befestéséhez elegendő, azért az edény falához elég lesz 10,19 cm^3 = 10,19 milliliter festék.

6. *A hagyományos ötöslottón egy szelvénnyel játszva a nyerés (legalább két találat) esélye kb.* 2,33%. *A nagy nyeremény reményében* 100 *véletlenszerűen kitöltött szelvényt küldünk játékba.*

a) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy nyertes szelvényünk? *(5 pont)*

b) Mekkora valószínűséggel lesz pontosan három nyertes szelvényünk? *(5 pont)*

c) Hány szelvényt kellene feladni egy adott héten, hogy legalább 99% *valószínűséggel legyen köztük nyertes szelvény?* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) $P(\text{legalább 1 nyertes})=1-P(\text{egy se nyer})=1-(1-0{,}0233)^{100}\approx 0{,}905$.

b) $P(3\text{ nyertes})=\binom{100}{3}\cdot 0{,}0233^3\cdot(1-0{,}0233)^{97}\approx 0{,}208$.

c) $0{,}99<P(\text{van nyertes})=1-P(\text{egy se nyer})$, azaz

$$0{,}01>P(\text{egy se nyer})=(1-0{,}0233)^n.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve: $-2>n\cdot\lg 0{,}9767$. Ebből kapjuk, hogy

$$n>\frac{-2}{\lg 0{,}9767}\approx 195{,}3.$$

Tehát legalább 196 szelvénnyel kellene játszanunk.

7. *Egy számunkra megközelíthetetlen hegy tetején álló adótorony magasságát szeretnénk meghatározni. A hegy lábával azonos magasságban elterülő síkságon felvesszük az egymástól* 80 *méterre lévő A és B pontokat úgy, hogy a B pontból az A pont és a torony (ebben a sorrendben) egy irányban látszódjanak. Az A pontból a torony alját* $41^\circ 30'$*-es, a tetejét* 49°*-os, a B pontból a torony alját* $34^\circ 15'$*-es szög alatt látjuk.*

a) Milyen magas a hegy? *(7 pont)*

b) Milyen magas a torony? *(5 pont)*

c) Mekkora szög alatt látszik a B pontból a torony teteje? *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Az adótorony tetejét jelölje T, alját T', a toronynak a talaj síkjára eső merőleges vetülete pedig legyen H. Ezekkel a jelölésekkel $T'AH\sphericalangle=41{,}5^\circ$, tehát $T'AB\sphericalangle=138{,}5^\circ$, $T'BA\sphericalangle=34{,}25^\circ$, míg $AT'B\sphericalangle=7{,}25^\circ$. A $T'AB$ háromszögben a szinusz tételt felírva:

$$\frac{T'A}{80}=\frac{\sin 34{,}25^\circ}{\sin 7{,}25^\circ},$$

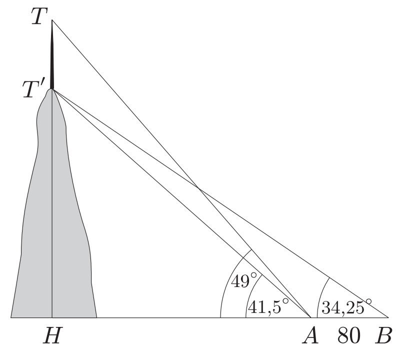
s ebből

$$T'A=80\cdot\frac{\sin 34{,}25^\circ}{\sin 7{,}25^\circ}\approx 356{,}8.$$

A $T'HA$ háromszögből:

$$T'H=T'A\cdot\sin 41{,}5^\circ\approx 236{,}4.$$

Vagyis a hegy magassága kb. 236,4 m.



b) A $TT'A$ háromszögben $T'AT\sphericalangle = 7{,}5°$ és $T'TA\sphericalangle = 41°$. A szinusz tétellel:

$$\frac{TT'}{T'A} = \frac{\sin 7{,}5°}{\sin 41°}, \quad \text{ebből} \quad TT' = 356{,}8 \cdot \frac{\sin 7{,}5°}{\sin 41°} \approx 71.$$

Vagyis kb. 71 m magas az adótorony.

c) $HA = \dfrac{T'H}{\operatorname{tg} 41{,}5°} \approx 267{,}2.$

$$\operatorname{tg} HBT\sphericalangle = \frac{TH}{HB} = \frac{TT' + T'H}{HA + AB} = \frac{307{,}4}{347{,}2},$$

ahonnan $HBT\sphericalangle \approx 41{,}5°$. Vagyis a torony teteje a B pontból kb. $41{,}5°$-os szögben látszik.

8. *Adott a koordináta-rendszerben az*

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

egyenletű k_1 kör.

a) *Határozzuk meg a k_1 körbe írt derékszögű háromszög harmadik csúcsának koordinátáit, ha két ismert csúcsának koordinátái $(-2; 4)$ és $(5; 5)$.* *(6 pont)*

b) *Keressünk az x tengelyen olyan pontot, melyből a k_1 körhöz és az*

$$(x-12)^2 + y^2 = 4$$

egyenletű k_2 körhöz húzott érintők hosszúsága egyenlő. *(10 pont)*

Megoldás. *a*) A kör egyenletét átalakítva: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. Tehát a kör középpontja a $P(2;1)$ pont, sugara pedig 5 egység.

A két megadott pont valóban rajta van a körön.

Thalész tétele miatt a két pont által meghatározott szakasz a derékszögű háromszögnek csak befogója lehet, a háromszög harmadik csúcsa pedig a megadott pontok valamelyikén áthaladó átmérő átellenes pontja.

A kör középpontját felhasználva ezek könnyen meghatározhatók: $(6; -2)$ vagy $(-1; -3)$.

b) A keresett T pont koordinátái legyenek $(t; 0)$, az egyik érintési pont k_1-en legyen S_1. A k_2 kör középpontja $U(12; 0)$, sugara 2 egység, az egyik érintési pont itt legyen S_2. TS_1P és TS_2U háromszögek derékszögűek, a TS_1 és TS_2 érintőszakaszok egyenlők.

A Pitagorasz-tételeket felírva:

$$TS_1^2 = TP^2 - PS_1^2 = (t-2)^2 + (0-1)^2 - 5^2;$$
$$TS_2^2 = TU^2 - US_2^2 = (t-12)^2 - 2^2.$$

$TS_1 = TS_2$ miatt: $(t-2)^2 - 24 = (t-12)^2 - 4$. Ezt megoldva $t = 8$ adódik.

Vagyis a keresett pont a $(8; 0)$.

9. *a*) *Határozzuk meg az $f(x) = px^2 + 2x + q$ függvény grafikonja, valamint az $x = 4$ és az $x = 6$ egyenesek által közrezárt síkidom területét, ha tudjuk, hogy*

$$\int_0^2 f(x)\,dx = -2 \qquad \textit{és} \qquad \int_2^4 f(x)\,dx = 54.$$ *(9 pont)*

b) *Határozzuk meg azon k értékeket, melyekre*

$$\int_0^k f(x)\,dx = 0.$$ *(7 pont)*

Megoldás. *a*) A két integrál értékéből egy-egy egyenletet írhatunk fel a két ismeretlen paraméterre:

$$\int_0^2 (px^2+2x+q)\,dx = \left[\frac{px^3}{3}+x^2+qx\right]_0^2 = \frac{8p}{3}+4+2q=-2,$$

$$\int_2^4 (px^2+2x+q)\,dx = \left[\frac{px^3}{3}+x^2+qx\right]_2^4 = \left(\frac{64p}{3}+16+4q\right)-\left(\frac{8p}{3}+4+2q\right)=$$

$$=\frac{56p}{3}+12+2q=54.$$

Rendezve a két egyenletet kapjuk, hogy $8p+18+6q=0$ és $56p-126+6q=0$. Az egyenletrendszer megoldása: $p=3$, $q=-7$. A keresett terület:

$$\int_4^6 3x^2+2x-7=\left[x^3+x^2-7x\right]_4^6=(216+36-42)-(64+16-28)=210-52=158.$$

b)

$$\int_0^k 3x^2+2x-7=\left[x^3+x^2-7x\right]_0^k=k^3+k^2-7k=k(k^2+k-7)=0.$$

A harmadfokú egyenlet megoldásai: $k_1=0$, $k_2=\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\approx 2{,}19$, $k_3=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}\approx -3{,}19$.