I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{2x^2-10x+9}{x^2-4x-12}=\frac{x^2-x-9}{(x-6)(x+2)}. \qquad (\textit{11 pont})$$

2. Az ABC háromszög oldalainak hossza 26, 28 és 30.
a) Igazoljuk, hogy a háromszög hegyesszögű!
b) Mekkora a háromszög leghosszabb magassága?
c) Az ABC háromszög síkjával párhuzamos síkban van egy $A'B'C'$ háromszög, amely az ABC háromszöghöz középpontosan hasonló, a hasonlóság aránya 0,5. A két párhuzamos sík távolsága 12. Mennyi az $ABCA'B'C'$ test térfogata? (*12 pont*)

3. *a*) Hány olyan négyjegyű szám van, amely osztható 3-mal és 9-re végződik?
b) Ha egy számtani sorozat első 51 darab páratlan sorszámú elemének összegéből kivonjuk az első 50 darab páros sorszámú elemének összegét, különbségként 2007-et kapunk. Ha ugyanennek a számtani sorozatnak az első 50 darab páros sorszámú elemének összegéből kivonjuk az első 50 darab páratlan sorszámú elemének összegét, akkor pedig 2000 a különbség. Határozzuk meg a sorozat 101. elemét. (*14 pont*)

4. Mekkora szögben látszik a PQ szakasz az $y=x^2-2x-2$ egyenlettel megadott alakzat $P(-1;1)$ és $Q(2;-2)$ pontjában húzott érintők metszéspontjából? Adjuk meg az érintők metszéspontjának koordinátáit. (*14 pont*)

II. rész

5. Legyen P az $ABCD$ négyzet AC átlójának az a pontja, amelyre $AP=AB=1$. Az AC átlóra a P pontban állított merőleges egyenes a BC oldalt a Q pontban metszi. Az $ABCD$ sík P pontjában a síkra állított merőleges egyenesre mérjük fel a $PE=1$ távolságot.
a) Igazoljuk, hogy az $ABQP$ négyszög deltoid.
b) A deltoid területe hányadrésze a négyzet területének?
c) Számítsuk ki az $ABCDE$ gúla oldallapjainak az alaplap síkjával bezárt hajlásszögét. (*16 pont*)

6. A $10^n+14^n+15^n+21^n$ kifejezésben az n 3-mal osztható pozitív egész számot jelöl.
a) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen n esetén osztható lesz 1260-nal.
b) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható? (*16 pont*)

7. Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=8x^3-6x-1$ hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb: $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$. (*16 pont*)

8. *a*) Egy szabályos sokszöget két átlójával négy síkidomra vágtunk: négyszögre, ötszögre, hatszögre és nyolcszögre. Hány oldala van a szabályos sokszögnek?
b) Egy szabályos tizenötszög csúcsait pirosra, a belsejében pedig néhány pontot zöldre színeztünk. Az így kapott színes pontokat minden lehetséges módon páronként összekötöttük egy-egy szakasszal. Azon szakaszok száma, amelyeknek a végpontjai azonos színűek megegyezik azon szakaszok számával, amelyeknek a két végpontja nem azonos színű. Hány darab zöld pontot vettünk fel a sokszög belsejében? (*16 pont*)

9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)^x}+\sqrt{\left(7-4\sqrt{3}\right)^x}=\frac{5}{2} \qquad (\textit{16 pont})$$