I. rész

1. *a) Egy urnában 100 cédula van 1-től 100-ig megszámozva. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre két cédulát kihúzva ikerprímszámok lesznek a cédulákon? (Ikerprím két olyan prímszám, amelyek a természetes számok sorozatában egymás után következő páratlan számok.)*

b) Mennyi a valószínűsége a „hármas iker” húzásának, ha három cédulát húzunk ki egyszerre? (*11 pont*)

Megoldás. *a)* 1-től 100-ig összesen 8 pár ikerprímszám van: $(3;5)$, $(5;7)$, $(11;13)$, $(17;19)$, $(29;31)$, $(41;43)$, $(59;61)$ és a $(71;73)$. A 100 cédula közül kettőt $\binom{100}{2} = 4950$-féleképpen lehet kiválasztani, ezért a keresett valószínűség $p = \dfrac{8}{4950} \approx 0{,}0016$.

b) „Hármas iker” csak egyféleképpen húzható, mert három egymást követő páratlan szám között mindig lesz egy 3-mal osztható. A 3-mal osztható számok között pedig egyetlen prímszám van, a 3. A „hármas iker” így a $(3;5;7)$.

A keresett valószínűség:

$$p = \frac{1}{\binom{100}{3}} = \frac{1}{161\,700} \approx 6{,}184 \cdot 10^{-6}.$$

2. *Osztható-e a* $\binom{38}{19}$ *binomiális együttható 17-tel?* (*12 pont*)

Megoldás.

$$\binom{38}{19} = \frac{38!}{19! \cdot 19!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 38}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19)^2}.$$

A számláló és a nevező is a 17-nek pontosan a második hatványával osztható, ezért 17^2-nel lehet egyszerűsíteni. Tudjuk, hogy $\binom{38}{19}$ egész szám.

Az előzőek alapján látható, hogy a $\binom{38}{19}$ binomiális együttható nem osztható 17-tel.

3. Az

$$x^2 + y^2 + kx - \frac{k^2}{2}y + 1 = 0$$

kör egyenletében határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy a kör mindkét koordináta-tengelyt érintse. (*14 pont*)

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + \left(y - \frac{k^2}{4}\right)^2 - \frac{k^4}{16} + 1 = 0,$$

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k^2}{4}\right)^2 = \frac{k^4}{16} + \frac{k^2}{4} - 1.$$

A kör középpontja $K\left(-\frac{k}{2}; \frac{k^2}{4}\right)$, sugara

$$r = \sqrt{\frac{k^4}{16} + \frac{k^2}{4} - 1},$$

feltéve, hogy a gyökjel alatti kifejezés pozitív.

A kör akkor érinti mindkét koordináta-tengelyt, ha $\left|-\frac{k}{2}\right| = \frac{k^2}{4}$.

Az egyenletnek három megoldása van: $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ vagy $k_3 = 0$.

A $k_1 = -2$ és a $k_2 = 2$ esetén pozitív valós szám lesz az r $(r = 1)$. Ezek adják a két megoldást: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ és $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

4. *a) Oldjuk meg az* $[x]^2 + 3 \cdot [x] - 10 = 0$ *egyenletet a valós számok halmazán. (Az* $[x]$ *az* x*-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelenti.)*

b) Milyen p és q egész számok esetén elégíti ki egyetlen egység hosszúságú számköz az $[x]^2 + p[x] + q = 0$ *egyenletet?* (*14 pont*)

Megoldás. *a)* Az $[x]$-re két értéket kapunk: $[x]_1 = 2$, $[x]_2 = -5$.
Ha $[x]_1 = 2$, akkor $x \in [2;3[$.
Ha $[x]_1 = -5$, akkor $x \in [-5;-4[$.

Vagyis a megoldás: $x \in [-5;-4[\cup [2;3[$.

b) Az adott egyenletből $[x]$-re egy megoldást kell kapnunk, ha

$$D = p^2 - 4q = 0 \qquad (p;q \in \mathbb{Z}).$$

Vagyis a q négyzetszám és a p páros szám között ha fennáll a $p^2 = 4q$ összefüggés, akkor az egyenletnek a megoldása egyetlen, egység hosszúságú számköz.

II. rész

5. *Határozzuk meg az $x^3 + (3-2a)x^2 - a^2x - 3a^2 + 2a^3 = 0$ egyenletben az „a" valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet valós gyökei valamilyen sorrendben mértani sorozatot alkossanak.* (*16 pont*)

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a harmadfokú kifejezést:

$$\begin{aligned} x^3 + (3-2a)x^2 - a^2x - a^2(3-2a) &= 0, \\ x(x^2 - a^2) + (3-2a)\cdot(x^2-a^2) &= 0, \\ (x^2-a^2)\cdot(x+3-2a) &= 0, \\ (x-a)\cdot(x+a)\cdot(x+3-2a) &= 0. \end{aligned}$$

Ebből az alakból leolvashatók az egyenlet gyökei: $x_1 = a$, $x_2 = -a$ és $x_3 = 2a-3$.

Három eset lehetséges.

I. A mértani sorozatban középső elem az $x_2 = -a$. Ekkor $(-a)^2 = a\cdot(2a-3)$. Ennek az egyenletnek két gyöke van: $a_1 = 3$, $a_2 = 0$.

Az $a_1 = 3$ esetén a mértani sorozat elemei: 3; -3; 3 ($q = -1$).

Az $a_2 = 0$ nem ad megoldást.

II. A mértani sorozat középső eleme az $x_1 = a$. Ekkor $a^2 = -a(2a-3)$. Ennek az egyenletnek két gyöke van: $a_3 = 1$, $a_4 = 0$.

Az $a_3 = 1$ esetén a mértani sorozat elemei: -1; 1; -1 ($q = -1$).

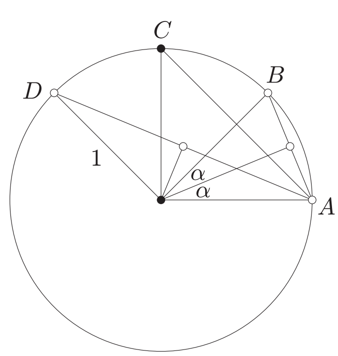
Az $a_4 = 0$ nem ad megoldást.

III. A mértani sorozat középső eleme az $x_3 = 2a-3$. Ekkor $(2a-3)^2 = -a^2$. Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

Vagyis két megfelelő paramétert találtunk: $a_1 = 3$, $a_3 = 1$.

6. *Egy szabályos sokszögben A, B, C és D a sokszög négy egymás utáni csúcsa, az AC szakasz négyzetes közepe az AB és AD szakasznak. Hány oldalú a sokszög?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a sokszög köré írt kör sugara 1. Jelöljük az AB-hez tartozó középponti szöget 2α-val. Ekkor $AB = 2\sin\alpha$, $AC = 2\sin 2\alpha$ és $AD = 2\sin 3\alpha$.



A feladat feltétele szerint $AC = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AD^2}{2}}$, azaz $2AC^2 = AB^2 + AD^2$. Ebből következik, hogy

$$2\cdot 4\cdot \sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha + 4\sin^2 3\alpha,$$

azaz $2\sin^2 2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2 3\alpha$. Az addíciós tételek felhasználásával a

$$8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \left[\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)\right]^2$$

egyenlethez jutunk. Mivel $\sin^2\alpha \neq 0$, azért eloszthatjuk vele az egyenlet mindkét oldalát. Így a $8\cos^2\alpha = 1 + (3-4\sin^2\alpha)^2$ egyenletet kapjuk. További alakításokkal:

$$8 - 8\sin^2\alpha = 1 + 9 - 24\sin^2\alpha + 16\sin^4\alpha, \qquad 8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1 = 0.$$

Ebből kapjuk, hogy $\sin^2\alpha = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$, amihez $\cos^2\alpha = \dfrac{2\mp\sqrt{2}}{4}$ tartozik. Ekkor

$$\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\cdot\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2\mp\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Csak abban az esetben kaphatunk szabályos sokszöget, ha a 2α fokban mért értéke n-ed része $360°$-nak, ahol $n \geq 4$. Az egyetlen megfelelő érték a $2\alpha = 45°$. Ez azt jelenti, hogy a szabályos sokszög nyolcoldalú.

7. *a) Oldjuk meg a*

$$2x^2 - \left[2\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]x + \sin 2\alpha = 0$$

egyenletet, ahol az α *valós paraméter.*

b) Mutassuk meg, hogy az $f(\alpha) = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ *hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény a* $g(\alpha) = \cos^2\alpha$ *hozzárendeléssel adott, valós számokon értelmezett függvény transzformáltja.* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Az egyenlet a következő alakban is írható az addíciós tételek segítségével:

$$x^2 - (\sin\alpha + \cos\alpha)x + \sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggést alkalmazva az egyenlet gyökei: $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\alpha$.

b)

$$f(\alpha) = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2\alpha.$$

8. *a) Mutassuk meg, hogy az* $y = x^3 + ax^2 + (2a-3)x + a - 2$ *görbesereg minden tagja egy ponton megy át, ahol „a" tetszőleges valós szám. Adjuk meg ennek a fix pontnak a koordinátáit.*

b) Hogyan kell megválasztani az „a" paraméter értékét, hogy a hozzá tartozó görbe $x_0 = 2$ *pontjában húzott érintője áthaladjon a* $P(-1;0)$ *ponton?* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Két tetszőleges a értékhez tartozó görbe közös pontja megadja a fix pontot. Legyen $a = 0$, illetve $a = 1$. Ha $a = 0$, akkor $y = x^3 - 3x - 2$. Ha $a = 1$, akkor $y = x^3 + x^2 - x - 1$.

Meghatározzuk a két görbe közös pontját:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 - 3x - 2, \quad \text{azaz} \quad x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Vagyis $x = -1$.

A két görbe közös pontja $P(-1;0)$, és ez valóban kielégíti a görbesereg minden tagjának egyenletét.

b) Felhasználjuk, hogy a keresett görbe $x_0 = 2$ pontjához tartozó érintőjének meredekségét a derivált helyettesítési értéke adja. Az $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a - 3$. Ebből $f'(2) = 6a + 9 = m_e$. Az érintési pont második koordinátája $f(2) = 9a$, ezért az érintési pont $E(2;9a)$. Az érintő egyenlete az a paraméter függvényében $y - 9a = (6a+9)\cdot(x-2)$. Mivel át kell mennie a $P(-1;0)$ ponton, azért $-9a = -3(6a+9)$.

Vagyis a megfelelő paraméter: $a = -3$.

9. *a) Határozzuk meg az „a" paraméter értékét, ha*

$$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1}\right) = 0,$$

ahol $f(x) = ax^2 - 3x + 2$.

b) Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *hozzárendeléssel megadott függvény grafikonja és az* x *tengely által meghatározott síkidom területét.* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Először számítsuk ki az $f(x)$ függvény $\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ helyen vett helyettesítési értékét:

$$f\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right) = a\cdot\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right) + 2 =$$

$$= \frac{a(2^{2x} - 2\cdot 2^x + 1) - 3\cdot(2^{2x} - 1) + 2\cdot(2^{2x} + 2\cdot 2^x + 1)}{2^{2x} + 2\cdot 2^x + 1} =$$

$$= \frac{(a-1)\cdot 2^{2x} - (2a-4)\cdot 2^x + a + 5}{2^{2x} + 2\cdot 2^x + 1}.$$

Ennek határértéke:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)=a-1=0\ \Rightarrow\ a=1.$$

Ezért $f(x)=x^2-3x+2$.

b) Az $f(x)$ függvény zérushelyei: $x_1=1$ és $x_2=2$. A kérdéses terület:

$$T=\left|\int_1^2(x^2-3x+2)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2\right|=\left|\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right|=\frac{1}{6}.$$