

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}(x + y)(x - 4y + 11) &= x - 4y + 11, \\ (4x - y)(2x - 3y - 8) &= 16(2x - 3y - 8).\end{aligned}\tag{11 pont}$$

2. Egy 60 cm széles vászonnak 120 cm-es darabját találtuk meg otthon a szekrényben, amelynek egyik sarkából korábban már levágtunk egy 30×30 cm-es derékszögű háromszöget. A megmaradt anyagból az eredeti téglalap oldalainak párhuzamos vágásokkal szeretnénk a legnagyobb területű téglalapot kiszabni. Mekkora lesz az új téglalap oldalainak a hossza?
(12 pont)

3. Adott az $\{a_n\} = \{9n + 8\}$ számtani sorozat. Ennek elemeiből képezzük a $\{b_n\} = \{a_{n+1}^2 - a_n^2\}$ sorozatot.

a) Mennyi a $\{b_n\}$ első 2007 tagjának összege?

b) Igazoljuk, hogy a $\{b_n\}$ is számtani sorozat.

c) Tagja-e a $\{b_n\}$ sorozatnak a 2007?
(14 pont)

4. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre illeszkedik a $P(8; 9)$ pont, az $e_1: 2x + 3y - 21 = 0$ és az $e_2: 2x + 3y - 9 = 0$ egyenletű egyeneseket pedig olyan pontokban metszi, amelyek ordinátáinak különbsége 4. (14 pont)

II. rész

5. A trapéz két átlója négy háromszögre bontja. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe 19 cm^2 és 63 cm^2 . Mekkora a trapéz területe?
(16 pont)

6. Egy urnába golyókat helyeztünk, melyekre számokat írtunk: egyre 1-est, kettőre 9-est, háromra 3-ast, és a golyókat egyforma valószínűséggel húzzuk ki.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy kétszer húzva visszatevés nélkül azonos számmal jelzett golyót veszünk ki?

b) Vegyünk ki négy golyót. Kirakhatunk-e belőlük olyan $4k + 1$ alakú pozitív egész számot, melyben a számjegyek szorzata 243, és a szám kisebb, mint a számjegyei összegének a 100-szorosa?
(16 pont)

7. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben az oldalak és szögek szokásos jelölése mellett fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{a \sin \beta}{\sin \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{2ab}{a + b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.\tag{16 pont}$$

8. Adott a térbeli koordináta-rendszerben a következő nyolc pont: $A(4; 0; 0)$, $B(4; 4; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $E(4; 0; 8)$, $F(4; 4; 8)$, $G(0; 4; 8)$, $H(0; 0; 8)$.

a) Legyen P a DH élen D -től 1 egységre lévő pont, Q pedig a BF él felezőpontja. Mekkora szöget zár be a PB és a PQ szakasz?

b) Az AE szakaszon fekvő R pontra igaz, hogy a CR egyenes metszi a PQ egyenest egy S pontban. Adjuk meg az S és R pontok koordinátáit.
(16 pont)

9. A következő függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük. Legyen $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$.

a) Írjuk fel a $h(x) = f[g(x)] - g[f(x)]$ függvény $x = 3$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjének az egyenletét.

b) Számítsuk ki az $[1; 3]$ intervallumon a $k(x) = g(x) - f(x)$ függvény görbéje alatti területet.
(16 pont)