[1]

Bevezetés

A felső matematikában gyakran találkozunk végtelen sorokkal. Legyen (a_n) egy valós számsorozat, és képezzük e számsorozat (s_n) összegsorozatát:

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ez utóbbi sorozatot szimbolikusan

$$s = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

jelöli, akár létezik határértéke, akár nem, és ***végtelen sornak*** nevezzük. Bár divergens sorok is hasznosak lehetnek, ebben a cikkben azonban mi *konvergens* sorokra összpontosítjuk figyelmünket, azaz olyan esetekre, ahol az s_n sorozat tart egy véges s határértékhez.

Nehézségük miatt a végtelen sorokat még a középiskola emelt szintű matematikai oktatásában sem tanítják, pedig nemcsak hasznosak, de érdekesek is. Folytatva korábbi cikkemet [8], a differenciál- és integrálszámításban járatos olvasóval együtt most megpróbálom újra bejárni a végtelen sorok felfedezésének leglátványosabb szakaszait, követve az úttörők zseniális pontatlanságait is. Akit az előadottak szabatos bizonyításai már most érdekelnek, annak számos tankönyv ajánlható (pl. [7]).

Kétrészes cikkem I. részében a végtelen mértani sorról beszélek, amellyel Akhillész és a teknősbéka paradoxonában találkozhatunk. Ebből viszonylag egyszerűen adódik a logaritmus- és az exponenciális függvény *hatványsora,* amelyek megfelelő (a_n), illetve (b_n) együtthatók mellett az

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

illetve általánosabban az

$$s(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + \ldots$$

alakban állítják elő a kérdéses függvényeket, ahol x_0 egy alkalmas valós szám.

Több ötletre van szükség más függvények, például az arkusz tangens függvény hatványsorának levezetéséhez. Szerencsére van egy általános elmélet is, amely mechanikusan alkalmazható.

A II. részben nehezebb kérdéseket járok körül. Különleges leleményességet igényelt a négyzetszámok inverz-négyzetösszegének kiszámítása, de a feladat meghálálta a fáradságot: egész matematikai elméletek nőttek ki e problémából.

Fizikai alkalmazásai mellett matematikai érdekessége is vitathatatlan az

$$s(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

trigonometrikus soroknak.

A cikk végén néhány következtetést vonok le. A kifejtésben a logika mellett a történetiségre [4] és a numerikus kiszámíthatóságra is hangsúlyt fektetek [3]. Az elmélyedést segítendő pár feladatot is kitűzök, amelynek megoldását a cikk végén közlöm. Néhány irodalmi utalással zárom a cikket.

A végtelen mértani sor

Történetünk Nagy-Görögországban (közelebbről a mai Dél-Olaszországban) az éleai Zénonnal (i.e. 460 körül) kezdődik, aki négy híres paradoxonával rámutatott a folytonosság fogalmi csapdáira. Itt csupán a legnevezetesebb *paradoxont* mutatjuk be, amely azt mondja ki, hogy hiába fut Akhillész kétszer gyorsabban, mint a teknősbéka, sohasem éri utol. „Valóban”, legyen a kezdeti távolság Akhillész és a teknősbéka között d_0, és legyen t_0 az az idő, amíg Akhillész lefutja e távolságot. Ez alatt azonban a teknősbéka is tovább lép, és a köztük lévő új távolság $d_1 = d_0/2$ lesz. Ennek leküzdéséhez Akhillésznak $t_1 = t_0/2$ időre lesz szüksége, de eközben újra keletkezik közöttük egy $d_2 = d_1/2$ távolság, s e folyamat a végtelenségig folytatódik, „tehát” Akhillész sohasem éri utol a teknősbékát.

Valóban? Tapasztalatból tudjuk, hogy éppen $2d_0$ távolság megtétele után éri utol a bajnok a teknősbékát, és ezt a végtelen mértani sor segítségével be is láthatjuk.

Már Eukleidész Elemei (i.e. 300) tartalmazták a véges mértani sor összegképletét. Mai jelöléssel: legyen x egy tetszőleges valós szám, és legyen $a_i = x^i$. Ekkor igaz az

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

képlet. Ha $-1 < x < 1$, akkor határértékre térhetünk, és adódik az

[1] Köszönetemet fejezem ki Somogyi Róbertnek a cikk írásához nyújtott segítségéért.

1. tétel. *A végtelen mértani sor összegképlete:*

$$s = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Az $x = 1/2$ értékre $s = 2$. Ezzel Zénon feladata megszűnt paradox lenni. Ezt tette *Grégoire de Saint Vincent* (1584–1667) a 17. sz. közepén, amikor – elsőként! – kiszámította, hogy Akhillész hol (példánkban éppen $2d_0$-ban) éri utol a teknősbékát.

Emlékeztetem az Olvasót, hogy korábbi cikkemben ([8], 3. példa) éppen ezt a sort mutattam be, mint *Isaac Newton* (1643–1727) általános binomiális tételének legegyszerűbb esetét.

Mielőtt lezárnám a témát, ízelítőül ismertetek egy heurisztikus levezetést is, amely egyszerűbb, mint a fenti, de nem szabatos.

$$s = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 1 + x(1 + x + \ldots + x^{n-1} + \ldots) = 1 + xs,$$

ahonnan rendezéssel adódik az 1. tétel eredménye. A továbbiakban még találkozunk hasonlóan ötletes, de megalapozatlan levezetésekkel. Ne felejtsük el, hogy külön igazolásra szorul a véges sorokra magától értetődő műveletek érvényessége: a tagok sorrendjének a megváltoztatása, valamint az összegezés és határértékképzés, illetve később az integrálás (differenciálás) sorrendjének a felcserélése.

A logaritmus- és az exponenciális függvény hatványsora

A végtelen mértani sorhoz hasonlóan egyszerű a logaritmus hatványsorának a kiszámítása, különösen a *természetes* alapúé. A természetes logaritmus alapja a következő határérték:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Csak ismerni kell hozzá az integrálszámítást, és elég bátornak vagy felelőtlennek kell lenni, hogy tagonként integráljuk az 1. tételbeli hatványsort. Ezt tette 1670 körül Newton. $1/(1-x)$ helyett $1/(1+x)$-et véve, a jobb oldalon előjelváltó összeget kapunk. A két oldal integrálja $\ln(1+x)$, illetve a $(-1)^n x^{n+1}/(n+1)$ tagok összege, ezért igaz a

2. tétel. *A logaritmusfüggvény hatványsora konvergens az $|x| < 1$ szakaszon:*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{(n+1)}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Figyeljük meg, hogy véges mértani sorral semmire sem mentünk volna!

Mire lehet használni egy hatványsort? Egyrészt végtelen sok tagot össze lehet adni zárt képletben (1. tétel), másrészt tetszőleges függvényértékeket lehet velük gyorsan és pontosan kiszámítani (2. tétel). Ezt teszi 1975 óta a zsebszámológépünk, és ezt tették a függvénytáblázatok 1670 és 1975 között (2. tétel). A függvényérték kiszámítására mutat példát az

1. feladat. *a*) Az $\ln(1+x)$ függvény hatványsora segítségével számítsuk ki $\ln 2$ értékét $n = 10^k$-ra, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

b) Mi történik, ha a $\ln 2 = -\ln(1/2)$ képletet alkalmazzuk?

c) Hogyan lehet a konvergenciatartományt kiterjeszteni Saint-Vincent

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

képletével? Az eredményeket a 3. táblázat tartalmazza (ld. 399. oldal).

Tudjuk, hogy az exponenciális függvény a logaritmusfüggvény inverze, azaz $e^{\ln x} = x$ minden pozitív x-re azonosan igaz. Newton ebből az összefüggésből vezette le a következő tételt:

3. tétel. *Az e^x függvény hatványsora minden valós x-re konvergens:*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

ahol $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$ az n szám faktoriálisa.

Speciálisan:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Ebből a képletből a Szentpétervárott dolgozó svájci származású *Leonhard Euler* (1707–1783) viszonylag egyszerű indirekt bizonyítással meglepő következtetést vont le.

Következmény (Euler, 1737). *Az e irracionális, azaz nem írható fel két egész szám hányadosaként.*

1. példa. Kiszámítjuk az e közelítő értékét az eredeti (1) és a hatványsoros (2) képlettel $n = 1, 2, \ldots, 9$-re.

n	e_n (1)	e_n (2)
1	2,00000	2,00000
2	2,25000	2,50000
3	2,37037	2,66667
4	2,44141	2,70833
5	2,48832	2,71667
6	2,52163	2,71806
7	2,54650	2,71825
8	2,56578	2,71828
9	2,58118	2,71828

1. táblázat. Az e kétféle közelítése

A második módszer nemcsak sokkal gyorsabb, mint az első, de jóval kevesebb számolást is igényel, mert az $(n+1)$-tagú összegnek csak az utolsó tagját kell az n-edik lépésben kiszámítani, és hozzáadni a már az előző lépésben kiszámított n-tagú összeghez.

Hamarosan egy egyszerűbb levezetést is adunk e^x hatványsorára.

Az arkusz tangens hatványsora

Ebben a pontban egy kevésbé népszerű függvény, az arkusz tangens függvény hatványsorát vezetjük le, amelynek érdekes alkalmazását adjuk meg.

4. tétel. *Az arkusz tangens függvény hatványsora:*

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |x| < 1.$$

Bizonyítás.

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x [\operatorname{arctg} t]' \, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$(\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}.$$

A bal oldalon a Newton–Leibniz-formulát, a jobb oldalon a $-x^2$ hányadosú végtelen mértani sor összegképletét és a hatványfüggvények integrálképletét alkalmazva, adódik a képlet. □

Ezt a képletet is lehet szögfüggvénytábla készítésére alkalmazni, de helyette inkább a legegyszerűbb speciális esetet írjuk föl: legyen $x = \tan(\pi/4) = 1$.

2. példa. A π szám kiszámítása végtelen sorral (Gregory, 1668 és Leibniz, 1676).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \ldots.$$

A skót *James Gregory* (1638–1675) ezzel a sorral próbálta igazolni, hogy a π irracionális, de próbálkozása sikertelen volt.

Ez a sor volt a német *Gottfried Leibniz* (1646–1716) egyik fő eredménye, amelyet 1676-ban a londoni Királyi Társaság titkárán, Oldenburgon keresztül elküldött Newtonnak.

A féltékeny vetélytárs, Newton kárörömmel válaszolta Leibniznek, hogy egyrészt már Gregory is ismerte e képletet, másrészt nagyon lassan konvergál a sor: „100 évre lenne szükség ahhoz, hogy 20 tizedesjegy pontossággal kiszámítsuk azt" ([4], 192. o.).

A Gregory–Leibniz-képletet beprogramozva, számítógéppel kiszámítjuk a π közelítő értékét $n = 10^k$-ra, $n = 10^k - 1$-re, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

A korai számítógépekről ismerős GWBASIC program egyszeres[2] pontosság esetén nem tud nagyon kicsi számokkal dolgozni, ezért a számítás fokozatosan annyira elromlik, hogy $n = 10^4$-nél már a „felső korlát" is a helyes érték alá süllyed!

tagszám n	alsó közelítés S_n	felső közelítés S_{n-1}
10	3,04184	3,25237
100	3,13159	3,15169
1000	3,14059	3,14259
10 000	3,14149	3,14169
100 000	3,14158	3,14160

2. táblázat. A Gregory–Leibniz-sor közelítése kettős pontossággal

A történeti hűség kedvéért megjegyezzük, hogy hasonlóan elemi módszerrel vezette le Newton és Leibniz az arkusz szinusz függvény hatványsorát az $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ binomiális sorából. Az inverz függvények hatványsoraként még meghatározták a tangens és a szinusz hatványsorát is, ezek megismétlését azonban csak a különlegesen szorgalmas olvasóknak ajánlom.

Ezek a sorok sajátosak, tudniillik tagjaik előjelváltók: pozitív és negatív előjelű tagjaik (gyakran 0 közbeékelődésével) váltják egymást. Emiatt a pozitív tagra végződő részösszegek felső, a negatív tagra végződő részösszegek alsó becslést adnak a „végösszegre". Ugyanakkor nem szabad tetszőlegesen felcserélni az összeadások és kivonások sorrendjét, mert megváltozhat a sor határértéke.

Általános hatványsorok

Szerencsére van egy mechanikus módszer is, amellyel egy tetszőleges, jól viselkedő f függvény hatványsora kiszámítható. Ez az ún. Maclaurin–Taylor-sor [3], a két névadó: *Brook Taylor* (1685–1731) angol matematikus és *Colin Maclaurin* (1698–1746) skót matematikus.

Mivel a hatványsornak két alakja is van, két esetet vizsgálunk. Kezdjük az egyszerűbbel:

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Vegyük tagonként az $s(x)$ függvény deriváltjait, ahol $n \geq k$ (vigyázat, ez az eljárás nem minden függvénysorra ad helyes eredményt!):

$$s'(x) = a_1 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$s^{(k)}(x) = k! a_k + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k} + \ldots .$$

Egyszerű behelyettesítéssel adódik, hogy $s(0) = a_0$, $s'(0) = a_1$, ..., $s^{(k)}(0) = k! a_k$. Bízva a szerencsénkben, kimondjuk a következő tételt.

5. tétel (Maclaurin, 1750). *a) Ha az*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

függvény hatványsora a $-R < x < R$ szakaszon konvergens, akkor értékét a Maclaurin-sor adja meg:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

b) Ha f akárhányszor differenciálható a $-R \leq x \leq R$ szakaszon, és van olyan M állandó, amelyre $\left|f^{(k)}(x)\right| < M$ minden k-ra, akkor a Maclaurin-sor a szóban forgó szakaszon konvergens.

[2]A cikkben használt BASIC változótípusok jellemzői:
– egyszeres pontosságú valós: hossza 4 byte;
– dupla pontosságú valós: hossza 8 byte;
– a számok lebegőpontos bináris formában vannak tárolva.

Hangsúlyozzuk a tétel hasznát: négy alapműveletre vezeti vissza az olyan nem algebrai (ún. transzcendens) függvények kiszámítását is, mint az exponenciális, a logaritmus és a szögfüggvények, amelyek deriváltjai egy korlátos szakaszon vagy akár az egész számegyenesen korlátosak.

Egy példa és egy feladat szemlélteti az általános módszer alkalmazhatóságát.

3. példa. A szinusz függvény hatványsora minden valós x-re

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots .$$

Valóban, $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, azaz $\sin 0 = 0$, $\sin' 0 = 1$, $\sin'' 0 = 0$, $\sin''' 0 = -1$ és $\sin^{(4)} 0 = 0$, ahonnan periodikusan folytatódik a sorozat.

Figyelemre méltó, hogy egy korlátos és periodikus függvény nem korlátos és nem periodikus függvények összegeként állítható elő.

2. feladat. Vezessük le a Maclaurin-sorból e^x hatványsorát.

A logaritmusfüggvény hatványsora esetén láttuk, hogy nem mindig lehet a 0 körül venni egy függvény hatványsorát. Erről szól az általánosabb

6. tétel (Taylor, 1715). *Az 5. tétel feltételei mellett egy $|x_0| < R$ szám körül is sorbafejthető a függvény, azaz értékét az $|x - x_0| < R$ szakaszon az ún. Taylor-sor adja meg:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

A képlet szabatos levezetése meglehetősen technikai (pl. [7]).

3. feladat. Igazoljuk, hogy az $f(x) = (1+x)^n$ esetében a Taylor-tétel éppen a klasszikus binomiális tételre egyszerűsödik. Egyébként a bizonyításban fel is használjuk e tételt.

Ismét egy történeti megjegyzés: Tudjuk, hogy Newton és Leibniz már az 1670-es években birtokában volt az általános Taylor-képletnek. De valamilyen okból nem tartották szükségesnek, hogy ki is mondják a tételt, ezért ma már Taylor, illetve Maclaurin nevét viselik e képletek.

Feladatmegoldások

1. feladat. A gondot az okozza, hogy $x = 1$ esetén a konvergenciakör határán vagyunk. Érdekes, hogy a GWBASIC program egyszeres pontossággal képtelen a végtelen sort akár 4 tizedes jegy pontossággal megállapítani: a Taylor-sor $S_{4000} = 0{,}69305$ fölé nem tud menni, pedig a pontos eredmény $\ln 2 = 0{,}693147$. A dupla pontosságot megkövetelve már 6 tizedes jegy pontossággal is működik a program. A $\ln 2 = -\ln(1/2)$ közelítés viszont már $n = 100$-ra is majdnem pontos. c) A konvergencia gyorsítható a $z = (1+x)/(1-x)$ helyettesítéssel. Ekkor

$$\ln z = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

n	S_n	S_{n-1}	$-U_n$
10	0,645635	0,645635	0,693065
100	0,688172	0,688172	0,693147
1000	0,692643	0,692647	0,693147
10 000	0,693050	0,693097	0,693147
100 000	0,693050	0,693142	0,693147
1 000 000	0,693050	0,693147	0,693147

3. táblázat. A logaritmus-sor közelítése

2. feladat. e^x bármely deriváltja e^x, azaz $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

3. feladat. Legyen $f(x) = (1+x)^n$, ekkor

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k)(1+x)^{n-k}, \quad \text{azaz} \quad f^{(k)}(1) = n(n-1)\ldots(n-k),$$

és

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Hivatkozások

[1] Euklidész, *Elemek,* görög kiadás fordítása, Szabó Árpád előszavával, Gondolat (Budapest, 1983).

[2] Freud, R.–Gyarmati, E., *Számelmélet,* Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2000).

[3] Fried, K.–Simonovits, M., *A gondolkodás számítógépes iskolája,* Typotex (Budapest, 2005).

[4] Gingyikin, Sz. G., *Történetek fizikusokról és matematikusokról,* 3. orosz kiadás fordítása. Typotex, javított kiadás (Budapest, 2004).

[5] Lakatos, I., *Bizonyítások és cáfolatok,* Gondolat (Budapest, 1981).

[6] Pólya, Gy., *Indukció és analógia: A matematikai gondolkodás művészete I,* Gondolat (Budapest, 1988).

[7] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai,* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1976).

[8] Simonovits, A., *Hogyan született az analízis?,* Középiskolai Matematikai Lapok, 2006/4. szám, 194–204.

[9] Simonyi, K.: *A fizika kultúrtörténete,* Gondolat, 2. bővített kiadás (Budapest, 1981).

[10] Szőkefalvi-Nagy, B., *Valós függvények és függvénysorok,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1965).