A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok. Mindegyik i-re $(1 \le i \le n)$ legyen*

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}$$

és legyen

$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

(a) *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ valós számokra*

$$(*) \qquad \max\big\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\big\} \ge \frac{d}{2}.$$

(b) *Mutassuk meg, hogy vannak olyan $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ valós számok, amelyekre $(*)$-ban az egyenlőség áll fenn.*

Lovász László Miklós megoldása. (a) Mivel $\max\{a_j : 1 \le j \le i\} \ge a_i$, és $\min\{a_j : i \le j \le n\} \le a_i$, nyilván $d_i \ge 0$. Jelöljön k egy olyan indexet, amelyre $d = d_k$; hasonlóan, legyen $a_\ell = \max\{a_j : 1 \le j \le k\}$ és $a_m = \min\{a_j : k \le j \le n\}$. Tegyük fel, hogy a feladat állításával ellentétben léteznek olyan $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ valós számok, amelyekre $|x_i - a_i| < \frac{d}{2}$, minden $i \le n$-re. Ekkor azonban az

$$a_\ell - x_\ell \le |x_\ell - a_\ell| < \frac{d}{2}, \qquad x_m - a_m \le |x_m - a_m| < \frac{d}{2}$$

egyenlőtlenségek összege: $a_\ell - a_m + x_m - x_\ell < d$.

Másrészt $\ell \le k \le m$ miatt $\ell \le m$, és ezért $x_m \ge x_\ell$. Így viszont $a_\ell - a_m + x_m - x_\ell = d_k + x_m - x_\ell \ge d$, ami az előbbi egyenlőtlenségnek ellentmond.

(b) Minden $1 \le i \le n$ indexre legyen

$$x_i = \frac{\max\{a_j : 1 \le j \le i\} + \min\{a_j : i \le j \le n\}}{2}.$$

Ez az x_i sorozat valóban növekedő, mivel az összeg mindkét tagja monoton növő az i függvényében: bővebb számhalmaz maximuma legalább akkora, mint a szűkebbé, egy halmazt szűkítve pedig a minimum ugyancsak nő. Az $A_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\}$ és $B_i = \min\{a_j : i \le j \le n\}$ jelölésekkel $A_i \ge a_i \ge B_i$, $d_i = A_i - B_i$, így

$$x_i - a_i \le x_i - B_i = \frac{A_i + B_i}{2} - B_i = \frac{A_i - B_i}{2} = \frac{d_i}{2},$$

$$a_i - x_i \le A_i - x_i = A_i - \frac{A_i + B_i}{2} = \frac{A_i - B_i}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

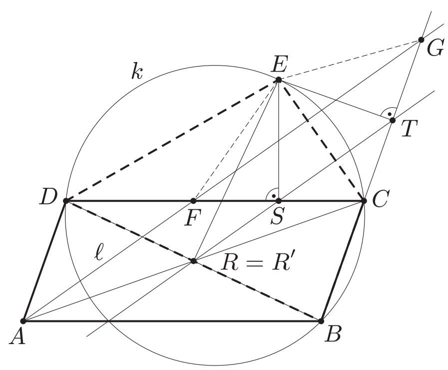
Tehát minden i-re $|x_i - a_i| \le \frac{d_i}{2} \le \frac{d}{2}$, azaz $\max\big\{|x_j - a_j| : 1 \le j \le n\big\} \le \frac{d}{2}$; az ($a$)-ban kapott általános becsléssel összevetve ez igazolja, hogy a választott x_i számok mellett $(*)$-ban egyenlőség áll.

2. *Tekintsünk öt olyan A, B, C, D, E pontot, amelyekre $ABCD$ egy parallelogramma, $BCED$ pedig egy húrnégyszög. Legyen ℓ egy, az A ponton átmenő egyenes. Tegyük fel, hogy ℓ a DC szakaszt az F belső pontban metszi, a BC egyenest pedig a G pontban. Tegyük fel továbbá, hogy $EF = EG = EC$. Bizonyítsuk be, hogy ℓ a $DAB\sphericalangle$ szögfelezője.*

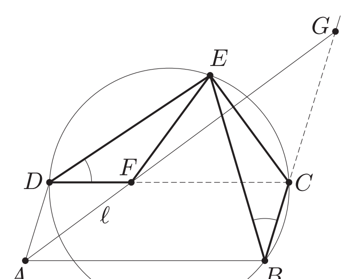
Hujter Bálint megoldása. A $BCED$ körülírt köre legyen k, a CG szakasz felezőpontja (egyben az E-ből CG-re állított merőleges talppontja) T, hasonlóan az FC felezőpontja (ami az E-ből FC-re állított merőleges talppontja) S, az E-ből a DB egyenesre emelt merőleges talppontja R, végül az ST és az AC egyenes metszéspontja R'.

Megmutatjuk, hogy $R' = R$, és ez a pont az $ABCD$ parallelogramma középpontja.

Az S, T, R pontok egy egyenesen, a BCD háromszög E-hez tartozó Simson-egyenesén vannak. Alkalmazzunk 2-szeres nagyítást a C-ből; ennek során T képe G, S képe F. A Simson-egyenes képe ezért ℓ, így R' képe A; vagyis R' az AC szakasz felezőpontja. Az R' a DB szakasz felezőpontjaként a Simson-egyenesnek DB-vel alkotott metszéspontja, ezért egybeesik R-rel.



Az ER szakasz merőlegesen felezi a DB-t, azaz $EB = ED$. Így az EDF és EBC háromszögek két-két oldala (ED és EB, illetve EF és EC) egyenlő, és megegyeznek az EF és EC oldalakkal szemközti szögek is, hiszen $EDF\sphericalangle$ és $EBC\sphericalangle$ egyaránt ugyanahhoz az EC ívhez tartozó kerületi szög k-ban. Mivel $DFE\sphericalangle$ az egyenlő szárú EFC háromszög alapon fekvő – tehát hegyes – EFC szögének külső szöge, azért $DFE\sphericalangle > 90^\circ$, és hasonlóan $BCE\sphericalangle > 90^\circ$. Tehát a tompaszögű EDF és EBC háromszögek egybevágóak; $DF = BC$.



A parallelogramma párhuzamos oldalai miatt az ADF és a GCF háromszögek megfelelő szögei egyenlők, e két háromszög hasonló, ezért $\dfrac{GC}{FC} = \dfrac{AD}{DF}$. Így $AD = BC = DF$ miatt $GC = FC$, vagyis az FCG (és a hozzá hasonló FDA) háromszög egyenlő szárú. A paralelogramma párhuzamos AB és DC oldalai révén az ABG háromszög is hasonló FCG-hez, így ugyancsak egyenlő szárú. Tehát $DAF\sphericalangle = DFA\sphericalangle = CFG\sphericalangle = CGF\sphericalangle = FAB\sphericalangle$.

3. *Egy matematikai verseny résztvevői közül némelyek barátok. A barátság mindig kölcsönös. Nevezzük a versenyzők egy halmazát* klikknek, *ha akárhogyan választva közülük kettőt, ők barátok. (Speciálisan bármelyik, kettőnél kevesebb versenyzőből álló halmaz klikk.) Egy klikk tagjainak a számát a klikk* méretének *fogjuk nevezni.*

Ha tudjuk, hogy ebben a versenyben a legnagyobb méretű klikk mérete páros szám, bizonyítsuk be, hogy elhelyezhetjük a versenyzőket két teremben olymódon, hogy az egyik teremben található legnagyobb méretű klikk mérete egyenlő legyen a másik teremben található legnagyobb méretű klikk méretével.

Gyenizse Gergő megoldása. (1) Tekintsük a barátsági kapcsolatokat megjelenítő G gráf pontjainak egy olyan felosztását egymástól diszjunkt A és B halmazokra, amelyre az A-ban található maximális méretű klikk legalább akkora, mint a B-ben található, és a két méret különbsége a lehető legkisebb. Ha e különbség pozitív, akkor megmutatjuk, hogy az értéke 1. Ellenkező esetben az A pontjait egyesével rakjuk át B-be; egy pont áthelyezésével az A-beli maximális méretű klikk mérete legfeljebb 1-gyel csökken, a B-belié legfeljebb 1-gyel nő, így a különbség legfeljebb 2-vel csökken.

(2) Ha a feladat állítása hamis, akkor tehát az A-beli maximális méretű klikk mérete a, a B-belié pedig $a-1$. A G-ben nincs $2a$-klikk, hiszen akkor abból vagy A-ba esne $(a+1)$-klikk, vagy B-be egy a-klikk. A feladat feltétele szerint ekkor viszont $(2a-1)$-klikk sem létezhet G-ben.

(3) Ha A-nak valamely x pontja nem tartozik hozzá egy A-beli a-klikkhez, akkor nincs olyan B-be eső $(a-1)$-klikk, amelynek minden pontja össze van kötve x-szel: ellenkező esetben ugyanis ezt az x pontot B-be áthelyezve az A-beli maximális klikkméret továbbra is a, a B-belié pedig szintén a-ra nőne.

(4) Megmutatjuk, hogy A-ban csupán egyetlen a-klikk található. Tegyük fel ugyanis, hogy van kettő; az egyiket jelölje C, és tegyük át A-nak a C-hez nem tartozó pontjait egyesével B-be. Ennek során B-ben ((3) szerint) nem keletkezhet $(a-1)$-nél nagyobb méretű klikk. Legyen p az a pontja A-nak, amelynek átrakása előtt még két a-klikk is található A-ban, utána viszont már csak egy, C. Jelölje továbbá q a C-nek egy olyan pontját, amely nincs összekötve p-vel. (Biztosan van ilyen pont, különben p a C-vel $(a+1)$-klikket alkotna.) Tegyük vissza a p után áthelyezett pontokat A-ba, a q pontot pedig rakjuk B-be. Azt állítjuk, hogy ekkor viszont A-ban és B-ben egyaránt $a-1$ a maximális klikkméret (ami ellentmondás). Valóban, q-val együtt csak C volt a-klikk az A-ban, ami q eltávolításával megszűnik. A (3) szerint q átkerülése előtt B-ben nem keletkezhet a-klikk, tehát csak úgy jöhetne végül létre, hogy q össze van kötve egy eredetileg is B-be tartozó $(a-1)$-klikk valamennyi pontjával. Ekkor viszont a következőképpen módosíthatunk: az eredeti A-ból csupán q kerüljön át B-be, ezzel ott létrejön egy a-klikk; A-ban viszont megmarad az a C-től különböző a-klikk, amely korábban p áttételével szűnt csak meg, ezért szükségképpen tartalmazza p-t. Így azonban nem tartalmazza q-t, hiszen p és q nincs összekötve. Ebben az elrendezésben tehát A és B maximális klikkmérete egyaránt a, ami ellentmondás.

(5) Jelölje a (4) szerint egyetlen A-beli a-klikket C, és helyezzük át az A összes, C-n kívüli pontját B-be; ennek során B maximális klikkmérete változatlanul $a-1$ marad. Ha viszont ezután $C=A$ bármelyik y pontját B-be helyezzük, akkor A maximális klikkmérete $(a-1)$-re csökken, ezért – eredeti indirekt feltevésünk értelmében – B-ben a-klikk jön létre, méghozzá (4) szerint pontosan egy, jelöljük D-vel. A D-nek létezik olyan z pontja, ami az A-ból megmaradt $(a-1)$-klikk valamelyik pontjával nincs összekötve, hiszen ellenkező esetben a két halmaz $(2a-1)$-klikket alkotna G-ben, ellentmondva (2)-nek. Így azonban a z pontot az A-ba téve, ott továbbra is $a-1$ marad a maximális klikkméret, B-ben pedig $(a-1)$-re csökken, mivel D, az egyetlen a-klikk a z eltávolításával megszűnik. Ez ellentmond eredeti indirekt feltevésünknek.

4. *Az ABC háromszögben a $BCA\sphericalangle$ szögfelezője a körülírt kört az R pontban metszi ($R \neq C$), a BC szakasz felezőmerőlegesét P-ben, az AC szakasz felezőmerőlegesét pedig Q-ban. A BC szakasz középpontja K, az AC szakasz középpontja pedig L. Bizonyítsuk be, hogy az RPK és RQL háromszögek területe egyenlő.*

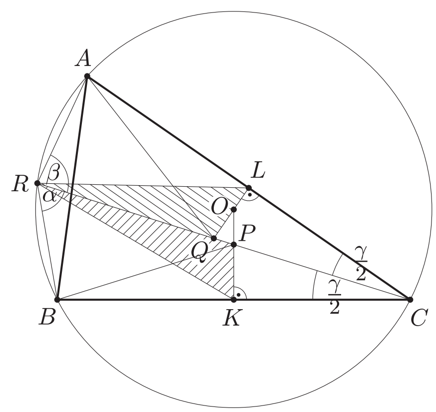
Szűcs Gábor megoldása. Elég belátni, hogy a *2. ábrán* jelölt RPK, illetve RQL háromszögeknél kétszerte nagyobb területű RPB és RQA háromszögek területe egyenlő. Az ABC háromszög szögeit jelölje a szokásos módon α, β, γ; meghatározzuk a szóban forgó két háromszög szögeit. Az ACQ háromszög egyenlő szárú, ezért

$$QAC\sphericalangle = QCA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}.$$

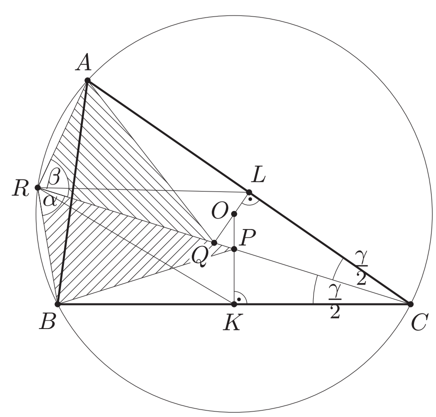
Így $RQA\sphericalangle = QCA\sphericalangle + CAQ\sphericalangle = \gamma$, és ehhez teljesen hasonlóan adódik, hogy $BPR\sphericalangle = \gamma$. A kerületi szögek tétele alapján $ARQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$, tehát

$$RAQ\sphericalangle = 180^\circ - ARQ\sphericalangle - RQA\sphericalangle = \alpha.$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy a BPR háromszög szögei ugyancsak α, β, γ; tehát ARQ és BPR hasonló háromszögek. Mivel az AR és RB ívekhez tartozó kerületi szög egyaránt $\frac{\gamma}{2}$, azért $AR = RB$: a két hasonló háromszögben a γ-val szemközti oldalak egyenlő hosszúak, így a két háromszög egybevágó, s ezért a területük is egyenlő.



1. ábra



2. ábra

5. *Legyenek a és b pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy ha $4ab-1$ osztója $(4a^2-1)^2$-nek, akkor $a=b$.*

Korándi Dániel megoldása. Legyen r és s egész szám. Ha a legnagyobb közös osztójuk d, akkor $r = dr_1$ és $s = ds_1$, ahol az r_1 és s_1 egészek egymáshoz relatív prímek. Tegyük fel, hogy r osztója s^2-nek; ekkor $dr_1 \mid d^2 s_1^2$ miatt $r_1 \mid ds_1^2$. Mivel r_1 relatív prím s_1^2-hez is, r_1 osztója d-nek. Ebből következik, hogy ha d osztója egy t egésznek, akkor $r = dr_1$ osztója t^2-nek.

$4ab-1$ és $4a^2-1$ legnagyobb közös osztója osztja a két szám különbségét, $4a(b-a)$-t is, és mivel (mindkét eredeti számhoz hasonlóan) relatív prím $4a$-hoz, osztója $(b-a)$-nak is. Az előbbi megjegyzés szerint tehát

$$4ab - 1 \mid (b-a)^2.$$

Megmutatjuk, hogy ez pozitív egész a-ra és b-re csak $a = b$ esetén teljesül. Tegyük fel ezzel szemben, hogy $b \neq a$; legyen például $b > a$. Ekkor

$$k = \frac{(b-a)^2}{4ab-1} \quad \text{pozitív egész.}$$

Rendezve: $0 = b^2 - 2a(1+2k)b + (a^2+k)$, azaz b gyöke az

$$x^2 - 2a(1+2k)x + (a^2+k) = 0$$

másodfokú egyenletnek. Jelölje az egyenlet másik gyökét c; ekkor $b + c = 2a(1+2k)$ egész, ezért c is egész, és $bc = a^2 + k > 0$ miatt c is pozitív. Valamivel pontosabban:

$$k = \frac{(b-a)^2}{4ab-1} < \frac{(b-a)^2}{4ab-4a^2} = \frac{(b-a)}{4a},$$

ezért $2a(1+2k) < 2a\left(1 + \dfrac{b-a}{2a}\right) = b + a$, tehát $0 < c < (b+a) - b = a$. Erre a c egészre (b-hez hasonlóan)

$$k = \frac{(c-a)^2}{4ac-1},$$

azaz $4ca - 1 \mid (a-c)^2$, és $0 < c < a$. Az $a = b_1 > c = a_1$ pozitív egész számpár tehát ugyanazt az oszthatósági feltételt teljesíti, mint a $b > a$ számpár, csak éppen $b_1 < b$. Az előbbi gondolatmenet így megismételhető b és a helyett b_1-gyel és a_1-gyel stb. Ezzel pozitív egészek végtelenül csökkenő $b > b_1 > \ldots$ sorozatát kapjuk, ami lehetetlen. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat, és ezzel a feladat állítását is.

6. *Legyen n pozitív egész. Tekintsük a háromdimenziós tér $(n+1)^3 - 1$ pontjából álló alábbi halmazt:*

$$S = \big\{(x,y,z)\colon x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z > 0\big\}.$$

Határozzuk meg azon síkok számának a minimumát, amelyekre igaz az, hogy uniójuk tartalmazza az S halmaz minden pontját, de nem tartalmazza a $(0,0,0)$ pontot.

Nagy Csaba megoldása. A feladat kérdésére a válasz: $3n$. Ennyi sík valóban elegendő, például az $x+y+z=1$, $x+y+z=2$, $\ldots$, $x+y+z=3n$ egyenletű síkok megfelelnek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy néhány síkkal lefedtük S-et, az origót azonban nem. Megmutatjuk, hogy a síkok száma legalább $3n$. Írjuk föl a síkok egyenletét $ax+by+cz+d=0$ alakban (ahol a, b, c nem mind nulla). Szorozzuk össze az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket; egy $p(x,y,z)$ polinomot kapunk, ami S pontjaiban nulla, az origóban pedig nem. Igazolnunk kell, hogy p foka legalább $3n$. Ehelyett a következő, általánosabb állítást látjuk be:

a, b, c természetes számok, és legyen

$$S(a,b,c) = \big\{(x,y,z) \mid x \in \{0,1,\ldots,a\},\ y \in \{0,1,\ldots,b\},\\ z \in \{0,1,\ldots,c\},\ x+y+z > 0\big\}.$$

Ha az $f(x,y,z)$ polinom $S(a,b,c)$ pontjaiban nulla, a $(0,0,0)$ pontban pedig nem, akkor a foka legalább $a+b+c$.

A bizonyítást az $(a+b+c)$-re vonatkozó indukcióval végezzük. Ha $a+b+c=1$, akkor a polinom legalább elsőfokú (azaz nem konstans), hiszen felvesz két különböző értéket. Ha $a+b+c>1$, akkor tekintsünk egy, a feltételeknek megfelelő f polinomot, a fokát jelölje t. Az a, b, c számok között létezik pozitív, legyen ez például a. Képezzük a $g(x,y,z) = f(x+1,y,z) - f(x,y,z)$ polinomot. A g polinom foka nyilván legfeljebb t; viszont $f(x+1,y,z)$-ben és $f(x,y,z)$-ben ugyanazok a megfelelő t-edfokú tagok együtthatói, így ezek kiejtik egymást g-ben. A g foka ezért legfeljebb $t-1$. A g polinom az $S(a-1,b,c)$ halmaz pontjaiban nulla, az origóban viszont nem nulla; az indukciós feltevés szerint tehát g foka legalább $a-1+b+c$, amiből $t-1 \geq a-1+b+c$, azaz $t \geq a+b+c$ következik.