1. feladat. Kettőscsillagok

1.1. kérdés. Periódusidő: 3 nap $= 2{,}6 \cdot 10^5$ s.

Periódusidő $= \dfrac{2\pi}{\omega}$, innen a szögsebesség: $\omega = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \dfrac{1}{\mathrm{s}}$.

1.2. kérdés. Nevezzük α-nak és β-nak az *1. ábrán*[2] látható minimumokat: $\dfrac{I_1}{I_0} = \alpha = 0{,}90$ és $\dfrac{I_2}{I_0} = \beta = 0{,}63$. Ezek segítségével a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{I_2}{I_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ezekből az összefüggésekből a kérdéses arányok kiszámíthatóak:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} = 1{,}56, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} = 1{,}39.$$

2.1. kérdés. A Doppler-eltolódás alapján: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cong \dfrac{v}{c}$. A maximális és minimális hullámhosszak: $\lambda_{1,\mathrm{max}} = 5897{,}7$ Å, $\lambda_{1,\mathrm{min}} = 5894{,}1$ Å, $\lambda_{2,\mathrm{max}} = 5899{,}0$ Å, $\lambda_{2,\mathrm{min}} = 5892{,}8$ Å.

A maximális és minimális hullámhosszak különbsége: $\Delta\lambda_1 = 3{,}6$ Å, $\Delta\lambda_2 = 6{,}2$ Å.

Vegyük észre, hogy a Doppler-eltolódás a pályamenti sebességek kétszereséből adódik:

$$v_1 = c\frac{\Delta\lambda_1}{2\lambda_0} = 9{,}2 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \qquad v_2 = c\frac{\Delta\lambda_2}{2\lambda_0} = 1{,}6 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

2.2. kérdés. Mivel a tömegközéppont nem mozog hozzánk képest: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{v_2}{v_1} = 1{,}7$.

2.3. kérdés. Felhasználva, hogy $r_i = \dfrac{v_i}{\omega}$ $(i = 1, 2)$, kiszámíthatjuk a csillagok pályájának sugarát: $r_1 = 3{,}8 \cdot 10^9$ m és $r_2 = 6{,}5 \cdot 10^9$ m.

2.4. kérdés. $r = r_1 + r_2 = 1{,}0 \cdot 10^{10}$ m.

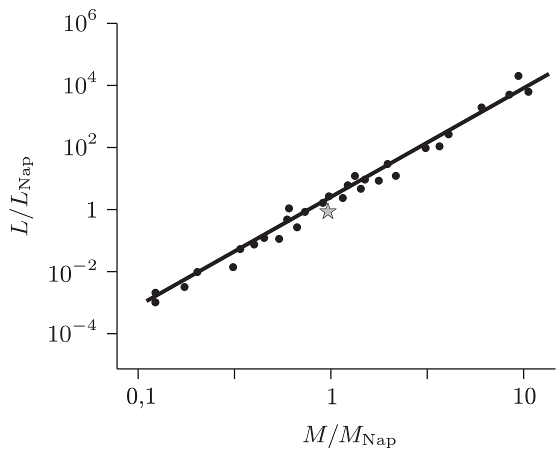
3.1. kérdés. A gravitációs erő megegyezik a tömeg és a centripetális gyorsulás szorzatával:

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1\frac{v_1^2}{r_1} = m_2\frac{v_2^2}{r_2}.$$

Ennek alapján

$$m_1 = \frac{r^2 v_2^2}{G r_2} = 6 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \qquad m_2 = \frac{r^2 v_1^2}{G r_1} = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

4.1. kérdés. A grafikon alapján világosan látszik, hogy a pontokra illeszthető egyenes meredeksége egy értékes jegy pontossággal $\alpha = 4$.



[1] Az elméleti feladatok szövegét múlt havi számunkban közöltük.
[2] KöMaL, 2007/7., 425. oldal.

4.2. kérdés. Az előző részfeladat eredménye alapján:

$$L_i = L_{\text{Nap}} \left(\frac{M_i}{M_{\text{Nap}}} \right)^4 .$$

Így $L_1 = 3 \cdot 10^{28}$ W és $L_2 = 4 \cdot 10^{27}$ W.

4.3. kérdés. A rendszer teljes kisugárzott teljesítménye egy d sugarú gömb mentén oszlik el egyenletesen, és hozza létre az észlelhető I_0 intenzitást:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}, \quad \text{ebből} \quad d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = 10^{18}\ \text{m} = 100\ \text{fényév}.$$

4.4. kérdés. $\theta \cong \operatorname{tg} \theta = \dfrac{r}{d} = 10^{-8}$ rad.

4.5. kérdés. Egy tipikus optikai hullámhossz: $\lambda_0 \cong 500$ nm. Mivel egy távcső szögfelbontása kb. λ_0/D, innen $D \gtrsim \dfrac{d\lambda_0}{r} \approx 50$ m.

2. feladat. Légzsák

1.1. kérdés. A kondenzátorlemezre felírva a Gauss-törvényt megkapjuk a térerősséget: $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$. A térerősséget a két kondenzátorlemezen lévő töltés együttesen hozza létre, így mindkét lemez hozzájárulása $\dfrac{1}{2}E$. Ennek alapján a lemezek közt ható erő:

$$F_{\text{e}} = \frac{1}{2}EQ = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

1.2. kérdés. A Hooke-törvény alapján a rugóerő: $F_{\text{m}} = -kx$. Az előző kérdésben levezettük a lemezek közt ható elektromos erőt: $F_{\text{e}} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$. A rendszer egyensúlyában $F_{\text{m}} + F_{\text{e}} = 0$, amiből $x = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 Ak}$.

1.3. kérdés. A térerősség a kondenzátorlemezek között homogén, így a lemezek közötti V potenciálkülönbség egyszerűen számolható: $V = E(d - x)$. Behelyettesítve az előző részekben kapott eredményeket, kapjuk:

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd} \right).$$

1.4. kérdés. A C kapacitás a töltés és a potenciálkülönbség hányadosa: $C = \dfrac{Q}{V}$. Felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt:

$$\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd} \right)^{-1}.$$

1.5. kérdés. A rugóban tárolt mechanikai energia $U_{\text{m}} = \dfrac{1}{2}kx^2$, a kondenzátorban tárolt elektromos energia pedig $U_{\text{E}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$. Így a rendszerben tárolt teljes energia

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 Akd} \right).$$

2.1. kérdés. Adott x érték esetén az egyes kondenzátorok töltése egyszerűen számolható:

$$Q_1 = VC_1 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d - x}, \qquad Q_2 = VC_2 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d + x}.$$

2.2. kérdés. Ne felejtsük el, hogy két kondenzátorunk van. Felhasználva az 1.1. kérdésre kapott választ, az egyes kondenzátorokban fellépő erő

$$F_1 = \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 A}, \qquad F_2 = \frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Mivel a két erő ellentétes irányú, az eredő erő

$$F_\mathrm{e} = F_1 - F_2 = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right).$$

2.3. kérdés. Elhanyagolva az x^2-rendű tagokat, kapjuk:

$$F_\mathrm{e} = \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x.$$

2.4. kérdés. Két, k rugóállandójú rugó van sorba kapcsolva, így az eredő mechanikai erő $F_\mathrm{m} = -2kx$. Az elektromos és a mechanikai erő ellentétes irányú, így, felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt, az eredő erő

$$F = F_\mathrm{m} + F_\mathrm{e} = -2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)x, \quad \text{ebből pedig} \quad k_\mathrm{eff} = 2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right).$$

2.5. kérdés. Felhasználva Newton II. törvényét és az előző eredményt

$$a = -\frac{2}{m}\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)x.$$

3.1. kérdés. Írjuk fel az áramkörre a Kirchhoff-törvényeket!

$$\frac{Q_\mathrm{K}}{C_\mathrm{K}} + V - \frac{Q_2}{C_2} = 0, \quad -\frac{Q_\mathrm{K}}{C_\mathrm{K}} + V - \frac{Q_1}{C_1} = 0, \quad Q_2 - Q_1 + Q_\mathrm{K} = 0.$$

Felhasználva, hogy $V_\mathrm{K} = \dfrac{Q_\mathrm{K}}{C_\mathrm{K}}$, kapjuk:

$$V_\mathrm{K} = V\frac{\dfrac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}}{C_\mathrm{K} + \dfrac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}}.$$

3.2. kérdés. Elhanyagolva az x^2-rendű tagokat, kapjuk:

$$V_\mathrm{K} = V\frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 C_\mathrm{K} + 2\varepsilon_0 A d}.$$

4.1. kérdés. Az elektromos és a mechanikai erő hányadosa

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{m}} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k_\mathrm{eff} d^3}.$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{m}} = 7{,}6 \times 10^{-9}.$$

Az elektromos erők valóban elhanyagolhatók a rugóerők mellett.

4.2. kérdés. Az előzőek szerint elegendő a rugóerőt figyelembe vennünk: $F = 2kx$. Így a gyorsuló (lassuló) rendszerben a mozgó lemez egyensúlyi elmozdulása $x = \dfrac{ma}{2k}$. A maximális elmozdulás ennek éppen kétszerese, hiszen a mozgó lemez túllendül az egyensúlyi helyzeten:

$$x_\mathrm{max} = 2x, \qquad x_\mathrm{max} = \frac{ma}{k}.$$

4.3. kérdés. Ha a gyorsulás $a = g$, a maximális elmozdulás

$$x_\mathrm{max} = \frac{mg}{k}.$$

Továbbá felhasználva a 3.2. kérdésre kapott eredményt:

$$V_\mathrm{K} = V\frac{2\varepsilon_0 A x_\mathrm{max}}{d^2 C_\mathrm{K} + 2\varepsilon_0 A d}.$$

Kifejezve C_K-t, és felhasználva, hogy $V_\mathrm{K} = 0{,}15$ V,

$$C_\mathrm{K} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{V x_\mathrm{max}}{V_\mathrm{K} d} - 1\right), \qquad C_\mathrm{K} = 8{,}0 \times 10^{-11}\ \mathrm{F}.$$

4.4. kérdés. Legyen ℓ a vezető feje és a kormány közötti távolság. Ennek becsült értéke $\ell = 0{,}4\ \mathrm{m} - 1\ \mathrm{m}$.

Abban a pillanatban, amikor a lassulás elkezdődik, a vezető fejének az autóhoz viszonyított relatív sebessége nulla. $\Delta v(t=0) = 0$, így

$$\ell = \frac{1}{2} g t_1^2, \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}, \qquad t_1 = 0{,}3\ \mathrm{s} - 0{,}5\ \mathrm{s}.$$

4.5. kérdés. A t_2 idő a harmonikus rezgést végző lemez periódusidejének fele: $t_2 = \dfrac{T}{2}$, a periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

így $t_2 = 0{,}019$ s.

Mivel $t_1 > t_2$, a légzsák időben aktiválódik.

Megjegyzés a feladathoz: A gyakorlatban valóban ilyen elven működő gyorsulásmérők aktiválják az autók légzsákját. A valóságos és a feladatban szereplő eszközök között a legfontosabb különbség a méretekben van! A kereskedelemben kapható gyorsulásérzékelők integrált áramköri technológiával készülnek, a miniatürizált mechanikai alkatrészek és az elektronika ugyanazon az egy-két mm^2 felületű félvezető csipen kerülnek kialakításra. Az apró és olcsó (néhány dolláros) eszközöket egyre több helyen használják rezgések mérésére és szabályozására; segítségükkel például csökkenthető a mosógépek centrifugálás közben fellépő rezonanciája.

3. feladat. Hawking-sugárzás

1.1. kérdés. Bármilyen alkalmas egyenlet felhasználásával megkaphatjuk a kérdéses mennyiségek dimenzióját. Például a következő kínálkozó lehetőségekkel élhetünk:

I) A Planck-összefüggés alapján:

$$h\nu = E \;\Rightarrow\; [h][\nu] = [E] \quad\Rightarrow\quad [h] = [E]\cdot[\nu]^{-1} = ML^2T^{-1}.$$

II) $[c] = LT^{-1}$.

III) A tömegvonzási törvény alapján:

$$F = \gamma\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad\Rightarrow\quad [G] = [F][r]^2[m]^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

IV) Az ekvipartíció tétel segítségével: $E = \dfrac{1}{2}k_\mathrm{B}\theta$, ahol θ-val jelöltük a hőmérsékletet. Ennek alapján $[k_\mathrm{B}] = [E][\theta]^{-1} = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1.2. kérdés. Például a Stefan–Boltzmann-törvény felhasználásával:

$$\frac{\text{Teljesítmény}}{\text{Felület}} = \sigma\cdot\theta^4,$$

amiből $[\sigma]K^4 = [E]L^{-2}T^{-1} \;\Rightarrow\; [\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.

1.3. kérdés. Egy számfaktortól eltekintve a Stefan–Boltzmann-állandó a következő alakban írható fel: $\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_\mathrm{B}^\delta$, ahol α, β, γ és δ értékét dimenzióanalízissel állapítjuk meg: $[\sigma] = [h]^\alpha [c]^\beta [G]^\gamma [k_\mathrm{B}]^\delta$, ahol például $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$. Szép sorjában írjuk be az összes dimenziót:

$$\begin{aligned} MT^{-3}K^{-4} &= \left(ML^2T^{-1}\right)^\alpha \left(LT^{-1}\right)^\beta \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\gamma \left(ML^2T^{-2}K^{-1}\right) = \\ &= M^{\alpha-\gamma+\delta}L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta}T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta}K^{-\delta}. \end{aligned}$$

A hatványkitevők egybevetéséből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\gamma+\delta &= 1 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta &= 0 \\ -\alpha-\beta-2\gamma-2\delta &= -3 \\ -\delta &= -4 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= -3, \\ \beta &= -2, \\ \gamma &= 0, \\ \delta &= 4, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad \sigma = \frac{k_\mathrm{B}^4}{c^2h^3}.$$

2.1. kérdés. Az eseményhorizont A területe a fekete lyuk m tömegétől, a c fénysebességtől és a G egyetemes gravitációs állandótól függ: $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$. A dimenzióanalízis módszere már a könyökünkön jön ki:

$$[A] = [G]^\alpha [c]^\beta [m]^\gamma \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad L^2 = \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\alpha \left(LT^{-1}\right)^\beta (M)^\gamma = M^{-\alpha+\gamma}L^{3\alpha+\beta}T^{-2\alpha-\beta}.$$

Most csak három ismeretlent tartalmaz az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha+\gamma&=0 \\ 3\alpha+\beta&=2 \\ -2\alpha-\beta&=0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha&=2, \\ \beta&=-4, \\ \gamma&=2, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad A = \frac{m^2G^2}{c^4}.$$

2.2. kérdés. Az entrópia $dS = dQ/\theta$ termodinamikai definíciója (dQ a hőközlés mértéke, θ pedig a rendszer abszolút hőmérséklete) alapján az entrópia dimenziója: $[S] = [E][\theta]^{-1} = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

2.3. kérdés. Az η állandó dimenzióját Bekenstein nyomán ($\eta = S/A$), valamint az alapvető fizikai állandók (h, c, G és k_B) függvényeként így fejezhetjük ki:

$$[\eta] = [S][A]^{-1} = MT^{-2}K^{-1},$$
$$[\eta] = [G]^\alpha [h]^\beta [c]^\gamma [k_\mathrm{B}]^\delta = M^{-\alpha+\beta+\delta}L^{3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta}T^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta}K^{-\delta}.$$

A hatványkitevők összevetése megint négyismeretlenes egyenletrendszerrel örvendeztet meg minket, ami azonban csak három ismeretlennel bír:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha+\beta+\delta&=1 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta&=0 \\ -2\alpha-\beta-\gamma-2\delta&=-2 \\ \delta&=1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha&=-1, \\ \beta&=-1, \\ \gamma&=3, \\ \delta&=1, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad \eta = \frac{c^3k_\mathrm{B}}{Gh}.$$

A továbbiakban már nem kell használnunk a dimenzióanalízis módszerét, ami nagy öröm, mert mostanra még a legelszántabbak is valószínűleg megcsömörlöttek tőle.

3.1. kérdés. A termodinamika első főtétele alapján $dE = dQ + dW$, ahol közelítésként feltesszük, hogy $dW = 0$. Az entrópia $dS = dQ/\theta$ definícióját felhasználva ezt kapjuk: $dE = \theta_\mathrm{H}\, dS + 0$.

Használjuk fel, hogy $S = \dfrac{Gk_B}{ch}m^2$, $E = mc^2$. Így a fekete lyuk Hawking-hőmérsékletére a következő összefüggést kapjuk:

$$\theta_\mathrm{H} = \frac{dE}{dS} = \left(\frac{dS}{dE}\right)^{-1} = c^2\left(\frac{dS}{dm}\right)^{-1}.$$

Elvégezve a deriválást, megkapjuk a végeredményt:

$$\theta_\mathrm{H} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{c^3h}{Gk_B}\cdot\frac{1}{m}.$$

Megjegyezzük, hogy a végeredményben található 1/2-es faktornak nincs jelentősége, elhagyható, csak a deriválás miatt maradt az összefüggésben.

3.2. kérdés. A Stefan–Boltzmann-törvény az egységnyi felületre jutó kisugárzott teljesítményt adja meg. Figyelembe véve az $E = mc^2$ összefüggést is, a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\sigma\theta_\mathrm{H}^4 A \\ \sigma &= \frac{k_\mathrm{B}^4}{c^2h^3} \\ A &= \frac{m^2G^2}{c^4} \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c^2\frac{dm}{dt} = -\frac{k_\mathrm{B}^4}{c^2h^3}\left(\frac{c^3h}{2Gk_B}\cdot\frac{1}{m}\right)^4\frac{m^2G^2}{c^4}.$$

Az egyszerűsítések elvégzése után:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16}\frac{c^4h}{G^2}\cdot\frac{1}{m^2}.$$

3.3. kérdés. A változók szétválasztásával a következő integrált végezhetjük el:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16}\frac{c^4h}{G^2}\frac{1}{m^2} \quad \Rightarrow \quad \int m^2\,dm = -\int\frac{c^4h}{16G^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad m^3(t) - m^3(0) = -\frac{3c^4h}{16G^2}t.$$

Amikor a fekete lyuk $t = t^*$-kor teljesen elpárolog:

$$m(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{16G^2}{3c^4 h} m^3.$$

3.4. kérdés. A fekete lyuk C_V hőkapacitása megmutatja, hogy a θ hőmérséklet egységnyi megváltozásához mekkora E energiaváltozás tartozik:

$$\left.\begin{aligned} C_V &= \frac{dE}{d\theta} \\ E &= mc^2 \\ \theta &= \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{m} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_V = -\frac{2Gk_B}{ch} m^2.$$

4.1. kérdés. Újra a Stefan–Boltzmann-törvény adja meg a fekete lyuk egységnyi felületének energiaveszteségi ütemét. A fekete lyuk kozmikus háttérsugárzás miatti energia nyereségét egy hasonló összefüggés írja le. Ezt úgy láthatjuk be, hogy termikus egyensúlyban a teljes energia változásnak el kell tűnnie. Ebből az következik, hogy az energia nyereség ütemét a Stefan–Boltzmann-törvénnyel teljesen megegyező formula jellemzi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\sigma\theta^4 A + \sigma\theta_B^4 A \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2} + \frac{G^2}{c^8 h^3}(k_\mathrm{B}\theta_B)^4 m^2.$$

4.2. kérdés. Vegyük a $\dfrac{dm}{dt} = 0$ esetet:

$$-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^{*2}} + \frac{G^2}{c^8 h^3}(k_\mathrm{B}\theta_B)^4 m^{*2} = 0, \quad \text{amiből} \quad m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{\theta_B}.$$

4.3. kérdés.

$$\theta_B = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{m^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right).$$

4.4. kérdés. Használjuk fel a 4.2. és a 3.1. részkérdésekre adott válaszeredményeket:

$$m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{\theta_B} \quad \text{és} \quad \theta^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{m^*} = \theta_B.$$

Úgy is érvelhetünk, hogy m^* felel meg a termikus egyensúlynak. Így $m = m^*$ esetén a fekete lyuk hőmérséklete θ_B. Az is elfogadható megoldás, hogy termikus egyensúly esetén

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma\big(\theta^{*4} - \theta_B^4\big)A = 0, \quad \text{amiből} \quad \theta^* = \theta_B.$$

4.5. kérdés. A 4.3. eredmény alapján megmutatható, hogy az egyensúly instabil:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} m > m^* \\ m < m^* \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{dm}{dt} > 0. \\ \dfrac{dm}{dt} < 0. \end{matrix}$$

Kónya Gábor (aki maximális pontszámra írta meg az elméleti feladatok megoldását) a következő kiegészítéssel látta el dolgozatát a diákolimpián. Munkáját, amelyben dimenzióanalízis nélkül, alapvető fizikai megfontolások segítségével vezeti le a Hawking-probléma kevéssé ismert formuláit, változtatás nélkül közöljük.

$A(m)$, $\theta_\mathrm{H}(m)$, $S(m)$ képletek egy alternatív levezetése:
Vegyünk egy p impulzusú fotont a fekete lyukban, a középponttól r távolságra. A foton teljes energiája:

$$pc - G\frac{\frac{p}{c}m}{r} \le 0 \quad \Rightarrow \quad r \le \frac{Gm}{c^2}.$$

Az eseményhorizont sugara és felülete:

$$R = \frac{Gm}{c^2} \quad \text{és} \quad A = 4\pi R^2 = 4\pi\frac{G^2 m^2}{c^4} \approx \frac{G^2 m^2}{c^4}.$$

Az R sugarú gömbbe zárt foton impulzusát a határozatlansági relációból $p = \dfrac{\hbar}{R}$-nek becsülhetjük. Egy foton mozgási energiája:

$$pc = \frac{\hbar c}{R} = \frac{\hbar c^3}{Gm} \approx \frac{hc^3}{Gm}.$$

A rendszer hőmérséklete: $\theta_{\mathrm{H}} \approx \dfrac{pc}{k} = \dfrac{hc^3}{Gkm}$ (ekvipartíció-tétel). A rendszer entrópiája:

$$S = \int \frac{d(mc^2)}{\theta_{\mathrm{H}}} = \frac{Gk}{hc} \cdot \frac{1}{2} m^2 \approx \frac{Gk}{hc} \cdot m^2.$$

$\eta = \dfrac{S}{A} = \dfrac{kc^3}{hG} =$ állandó.

Az eredmények megegyeznek a dimenzióanalízissel kaphatókkal, de az $S \sim A$ összefüggést bizonyítottuk, nem feltételeztük.

Kísérleti feladat

A kísérleti feladatban egy vasoxid (Fe_2O_3) nanorészecske-láncokat tartalmazó vékonyréteg-félvezető tiltottsáv-szélességét és vastagságát kellett meghatározni optikai módszerrel.

A tiltottsáv-szélesség a félvezetők és a szigetelők esetében a vegyérték sáv teteje és a vezetési sáv alja közti energia-különbség. A vegyérték sáv teljesen be van töltve elektronokkal, a vezetési sáv pedig üres – azonban a vegyérték sávból elektronok juthatnak a vezetési sávba, ha elegendő (legalább a tiltottsáv-szélességgel megegyező nagyságú) energiát kapnak.

A tiltottsáv-szélesség megméréséhez az átlátszó vékonyréteg fényelnyelő-képességét (abszorpcióját) kellett vizsgálniuk a versenyzőknek a mintán áthaladó fény spektrumának segítségével. Kicsit leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy az abszorpciós spektrumon hirtelen ugrás (növekedés) figyelhető meg, amikor a foton energiája eléri a tiltottsáv-szélességet.

Kísérletileg bebizonyították, hogy a tiltottsáv-szélességnél kicsit nagyobb fotonenergiák esetében a következő összefüggés teljesül:

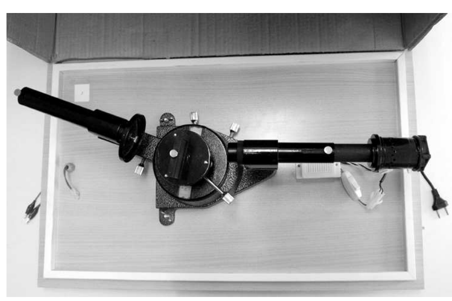
$$\alpha h\nu = A(h\nu - E_{\mathrm{g}})^{\eta}, \tag{1}$$

ahol α a vékonyréteg abszorpciós együtthatója, A egy anyagfüggő (a vékonyréteg anyagától függő) állandó, η pedig a vékonyréteg anyagától és szerkezetétől függő abszorpciós mechanizmusból meghatározható állandó. (A vizsgált vékonyrétegre $A = 0{,}071\ \mathrm{eV}^{1/2}/\mathrm{nm}$ és $\eta = 1/2$.) Az áteresztőképességet α értékével a jól ismert abszorpciós összefüggés kapcsolja össze:

$$T_{\mathrm{film}} = e^{-\alpha t},$$

ahol t a vékonyréteg vastagsága.

A mérési összeállításban (lásd *ábra*) egy $5'$ pontossággal beállítható goniométerre (szögmérésre alkalmas eszköz egy rögzített és egy forgó karral) szerelt optikai ráccsal lehetett felbontani egy halogénlámpa fehér fényét. A mintán és a referenciának használt üveglemezen áthaladó fény erősségét fotoellenállás segítségével lehetett mérni. (A fotoellenállás elektromos ellenállása csökken, ha a rá eső fény intenzitása növekszik.)



A mérés elején a versenyzőknek hosszadalmas, bonyolult eljárással kellett beállítaniuk az egyes optikai elemeket, és meghatározniuk a spektrális felbontás pontosságát. Ezt követte a mérés elvégzése (a mintán, illetve az üres üveglemezen átmenő fény intenzitásának mérése a hullámhossz függvényében) és az adatok kiértékelése.

A kiértékeléshez az $x = h\nu$ és $y = (\alpha t h\nu)^2$ értékpárokat kellett ábrázolni egy koordinátarendszerben, és a pontokra az (1) egyenletet kielégítő tartományban egyenest kellett illeszteni (lásd *grafikon*). Az (1) egyenletet t-vel megszorozva és négyzetre emelve kapjuk:

$$(\alpha t h\nu)^2 = (At)^2 (h\nu - E_{\mathrm{g}}),$$

amit összevetve x és y képletével:

$$y = (At)^2 (x - E_\mathrm{g}).$$

Ennek alapján az illesztett egyenes paramétereiből már könnyen meghatározható az E_g tiltottsáv-szélesség és (A ismeretében) a vékonyréteg t vastagsága. A vékonyréteg előállítása nehezen reprodukálható, így az egyes mintákon E_g értéke 2 eV és 2,2 eV között, t értéke 70 nm és 200 nm között változott. (A rendezők a versenyre készített mind a 616 mintát végigmérték!)