

I. megoldás. Tekintsük a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben a következő három helyvektort:

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\mathbf{e}_2 = (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$\mathbf{e}_3 = (\cos \gamma, \sin \gamma)$$

A feltételek szerint $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ és $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$. Tehát ha e vektorok kezdő-, ill. végpontjait egymáshoz fűzzük, szabályos háromszöget kapunk. Ezek szerint bármely kettő vagy 120° -os vagy -120° -os elforgatással vihető egymásba, azaz $\beta = \alpha \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$, $\gamma = \alpha \mp 120^\circ + l \cdot 360^\circ$ (k és l egészek). A háromszoros szögek különbsége tehát 360° többszöröse, így (1) valóban fennáll, mivel a tangens függvény 180° -onként periodikus.

Erdős Erika (Budapest, Könyves Kálmán Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg, milyen szögekre teljesülnek az egyenletek. A feltételek szerint

$$-\sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta$$

$$-\cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta.$$

Ezek négyzetét összeadva kis átalakítás után:

$$1 = 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta),$$

$$\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}.$$

Tehát $\alpha - \beta = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$. Ebből már az I. megoldás alapján és a feltételek szimmetriája miatt következik (1).

Bölcshölde László (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldás voltaképpen többet bizonyít, hiszen 360° szerint minden szögfüggvény periodikus, tehát 3α , 3β és 3γ minden szögfüggvénye egyenlő. Sőt $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\alpha = \operatorname{tg} \frac{3}{2}\beta = \operatorname{tg} \frac{3}{2}\gamma$, hiszen a $\frac{3}{2}$ -szeres szögek különbsége 180° -nak többszöröse.