I. rész

1. Határozzuk meg azokat az a, b, c egész számokat, melyekre teljesül a következő két tulajdonság:
i) A három szám összege fele a szorzatuknak;
ii) Az egyik szám egyenlő a másik kettő összegével. (*11 pont*)

2. Két, egy síkban haladó repülőgép repülési pályája két, egymásra merőleges egyenes. Egy adott pillanatban pályájuk képzeletbeli metszéspontjától az egyik repülőgép 2 km, a másik 2,5 km távolságban van. Az előbbi gép sebessége 270 km/h, a másiké 180 km/h. A gépek vészjelzője figyelmezteti a pilótákat, ha 1 km-nél jobban megközelítik egymást.
a) Határozzuk meg, hány másodperc múlva lesz a két repülőgép távolsága minimális. (*9 pont*)
b) Megszólal-e a vészjelző a repülőgépeken? (*3 pont*)

3. Egy nem állandó számtani sorozat első három eleme közül a másodikat és a harmadikat felcserélve egy mértani sorozat első három elemét kapjuk. A számtani sorozat első eleme egyenlő a második és a harmadik elem szorzatának ellentettjével. Határozzuk meg a számtani sorozatot. (*14 pont*)

4. Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze
a) egy ötfős csoportot; (*2 pont*)
b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot; (*4 pont*)
c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie; (*4 pont*)
d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki?
(*4 pont*)

II. rész

5. Egy egyenes körkúp alakú edény alapkörének sugara 12 cm, magassága 18 cm. Az edényt csúcsára állítjuk, és 1 liter vizet töltünk bele.
a) Milyen magasan áll benne a víz? (*8 pont*)
b) Mennyi festékre lenne szükség az edény külső falának befestéséhez, ha 1 liter festék 8 m^2 felületre elegendő? (*8 pont*)

6. A hagyományos ötöslottón egy szelvénnyel játszva a nyerés (legalább két találat) esélye kb. 2,33%. A nagy nyeremény reményében 100 véletlenszerűen kitöltött szelvényt küldünk játékba.
a) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy nyertes szelvényünk? (*5 pont*)
b) Mekkora valószínűséggel lesz pontosan három nyertes szelvényünk? (*5 pont*)
c) Hány szelvényt kellene feladni egy adott héten, hogy legalább 99% valószínűséggel legyen köztük nyertes szelvény? (*6 pont*)

7. Egy számunkra megközelíthetetlen hegy tetején álló adótorony magasságát szeretnénk meghatározni. A hegy lábával azonos magasságban elterülő síkságon felvesszük az egymástól 80 méterre lévő A és B pontokat úgy, hogy a B pontból az A pont és a torony (ebben a sorrendben) egy irányban látszódjanak. Az A pontból a torony alját $41°30'$-es, a tetejét $49°$-os, a B pontból a torony alját $34°15'$-es szög alatt látjuk.
a) Milyen magas a hegy? (*7 pont*)
b) Milyen magas a torony? (*5 pont*)
c) Mekkora szög alatt látszik a B pontból a torony teteje? (*4 pont*)

8. Adott a koordináta-rendszerben az

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

egyenletű k_1 kör.
a) Határozzuk meg a k_1 körbe írt derékszögű háromszög harmadik csúcsának koordinátáit, ha két ismert csúcsának koordinátái $(-2; 4)$ és $(5; 5)$. (*6 pont*)
b) Keressünk az x tengelyen olyan pontot, melyből a k_1 körhöz és az

$$(x - 12)^2 + y^2 = 4$$

egyenletű k_2 körhöz húzott érintők hosszúsága egyenlő. (*10 pont*)

9. a) Határozzuk meg az $f(x) = px^2 + 2x + q$ függvény grafikonja, valamint az $x = 4$ és az $x = 6$ egyenesek által közrezárt síkidom területét, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^2 f(x)\,dx = -2 \qquad \text{és} \qquad \int_2^4 f(x)\,dx = 54.$$ (*9 pont*)

b) Határozzuk meg azon k értékeket, melyekre

$$\int_0^k f(x)\,dx = 0. \qquad (7\ pont)$$