Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Egy számtani sorozat három egymást követő tagjához rendre 3-at, 1-et, 3-at adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk, amelyek összege 13.

Határozza meg a számtani sorozat első tagját és különbségét (differenciáját)!

2. Oldja meg az

$$\left(x^2+6x\right)^2-36=(x+3)^2+27$$

egyenletet a pozitív valós számok halmazán!

3. Az ABC háromszög oldalaira $AB \geq BC \geq AC$ teljesül. A C csúcsból induló magasság T talppontja negyedeli az AB oldalt. Az AB oldal F felezőpontjának a BC oldaltól mért távolsága az AB oldal hosszának negyede.

Mekkorák a háromszög szögei?

4. A Kovács házaspárhoz a Szabó és a Pék házaspár vendégségbe érkezik. Vacsorához – mind a hatan – egy kerek asztal köré ültek.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy sem házaspár, sem két nő nem került egymás mellé?

(Két ülésrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy embernek legalább az egyik szomszédja másik személy.)

5. Három egymást követő egész szám harmadik hatványának az összege milyen feltétel teljesülése esetén osztható 18-cal?

Bizonyítsuk be, hogy a keresett feltétel esetén a fenti összeg 36-tal is osztható!

6. Frédi és Béni jó barátok. Rendszeresen együtt futnak, illetve gyalogolnak. Egy alkalommal az A és B települések közötti távot úgy teszik meg, hogy egyszerre indulva Frédi a táv első felében fut, a másik felében gyalogol, Béni pedig a mozgásidejének a felében fut és a másik felében gyalogol. Annyira összeszoktak már, hogy mind a futási, mind a gyalogos sebességük azonos a másikéval.

Ki ér előbb A-ból B-be? (A futás sebesség nem kisebb a gyaloglás sebességénél.)

Második forduló

1. Határozzuk meg az m valós szám értékét úgy, hogy az

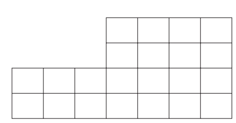
$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

egyenlőtlenség minden valós x-re teljesüljön!

2. Oldja meg a valós számokból álló számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$5x^2+2xy+2y^2-12x-6y+9=0.$$

3. Hány téglalap látható a rajzon? (A téglalapok oldalai csak megrajzolt szakaszok lehetnek.)



4. Legyenek egy háromszög oldalai a, b, c és a belső szögfelezőknek a háromszög belsejébe eső darabjai x, y, z hosszúságúak. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,!$$

5. Milyen pozitív p, q, r prímszámokra teljesül, hogy

$$(7-p)\cdot(3q+r)+p\cdot q\cdot r=0\,?$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Legyenek az $x^2-(a+d)\cdot x+ad-bc=0$ egyenlet gyökei az x_1 és x_2 valós számok!
Bizonyítsa be, hogy ekkor az $y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)\cdot y+(ad-bc)^3=0$ egyenlet gyökei az $y_1=x_1^3$ és $y_2=x_2^3$!

2. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. A DC; CB és BD szakaszok hosszai ebben a sorrendben egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai. Az AD; AB és AC szakaszok hosszai ebben a sorrendben szintén egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai.
Határozza meg a trapéz oldalai hosszának arányát!

3. Anna dobókockájának 4 lapja fehér, 2 lapja fekete, Bori dobókockájának minden lapja fehér.
a) Bori be akarja festeni a kockája néhány lapját feketére úgy, hogy ha a festés után egyszerre dobnak a kockáikkal, akkor az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{7}{18}$ legyen. Hány lapot fessen be Bori?
b) Mutassa meg, hogy Bori nem tudja úgy festeni a kockáját, hogy az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$ legyen!
c) A Bori által feketére festett lapok számához rendeljük hozzá az azonos szín dobásának valószínűségét! Adja meg ennek a függvénynek az értékkészletét!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van és ezek összege 84?

2. Az a valós paraméterrel adott az alábbi egyenlet, jelölje az egyenlet valós gyökeit x_1 és x_2:

$$2x^2-3(a+2)x+9a+1=0.$$

(a) Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $x_1^2+x_2^2$ kifejezés értéke minimális legyen.
(b) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan valós a érték, amely esetén x_1 és x_2 is egész szám.
(c) Keressük meg az a paraméter olyan egész értékeit, melyek esetén az egyenletnek egyik gyöke egész.

3. Legyen n egynél nagyobb egész. Egy háromszög oldalainak mérőszámai:

$$a=2^{n+2}-2^{n+1}+2^n,\quad b=2^{n+1}-2^n+2^{n-1},\quad c=3\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{n-1}.$$

Mekkora a háromszög legnagyobb szögének tangense?

4. Egy táblára felírunk négy darab egymástól különböző pozitív egész számot. Először letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a letörölt két szám mértani közepét. A táblán lévő három szám közül újra letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a most letörölt két szám mértani közepét. Ezt követően a táblán levő két szám mértani közepe 2.
Mekkora lehetett az eredeti négy szám összege?

5. A hegyesszögű ABC háromszög AC oldalának mely P pontjára lesz a PB^2+PC^2 összeg minimális?

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi összeggel megadott N szám nem prím:

$$N=\left(\sum_{n=1}^{2006}n^n\right)+2006^{2007},\quad\text{azaz}\quad N=1^1+2^2+3^3+\dots+2005^{2005}+2006^{2006}+2006^{2007}.$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $0\le x\le 2\pi$, és $0\le y\le 2\pi$:

$$\cos x+\cos y=1, \tag{1}$$

$$\sin x\cdot\sin y=-\frac{3}{4}. \tag{2}$$

3. Legyenek az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ azonos körüljárású szabályos háromszögek. A sík egy tetszőleges O pontjából mérjük fel a következő vektorokat:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A_2A_1},\qquad\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B_2B_1},\qquad\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{C_2C_1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög szabályos.

4. Egy szabályos 21 oldalú sokszög csúcsait megszámoztuk sorban a $0, 1, 2, 3, \dots, 20$ számokkal. Egy urnába betettünk 21 lapot, ezeken is a $0, 1, 2, 3, \dots, 20$ számok voltak. Az urnából kihúzunk három lapot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a lapokon szereplő számoknak megfelelő három csúcs hegyesszögű háromszöget alkot?

Harmadik (döntő) forduló

1. Melyek azok az $(a; b; c)$ rendezett valós számhármasok, amelyekre ha az a, b, c bármelyikét kivonjuk a másik kettő szorzatából, úgy 2007-et kapunk?

2. Adott egy parabola és síkjában a P külső pontból húzott két érintő, rajtuk az A, illetve B érintési ponttal. A parabola az ABP háromszöget egy X területű konvex és egy Y területű konkáv részre osztja. Igazoljuk, hogy az $X : Y$ arány nem függ a külső P pont megválasztásától.

3. Egy négyzetet oldalaival párhuzamos egyenesekkel 16 egybevágó négyzetre bontunk. Ezeket a négyzeteket pirosra vagy kékre színezhetjük a következő módon: egyszerre egy 2×2-es vagy 3×3-as (az oldalakkal párhuzamos) négyzet 4, illetve 9 négyzetének színeit változtathatjuk ellenkezőre. Kezdetben mind a 16 négyzet piros.

(a) Az előbbi lépések egymásutáni alkalmazásaival elérhető-e, hogy a felső sor balról második négyzete kék, a többi 15 négyzet piros legyen?

(b) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 2^{12} féle színezés lehetséges. A forgatással és/vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket is különbözőknek tekintjük.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c pozitív egészre $(a, b)(a, c)[b, c]$ osztója abc-nek. (A szokásos módon (x, y), illetve $[x, y]$ az x és y legnagyobb közös osztóját, illetve legkisebb közös többszörösét jelöli.)

2. Adott N és k pozitív egészekre megszámoltuk, hogy az N számot hányféleképpen lehet felírni $a+b+c$ alakban, ahol $1 \leq a, b, c \leq k$, és az összeadandók sorrendje is számít (a, b, c is egészek). Kaphattunk-e eredményül 2006-ot?

3. Bálint 200 forintot fizet Annának, ha a (90-ből 5-ös) lottón a kihúzott számok szorzatának utolsó számjegye 0 lesz (tízes számrendszerben), viszont Anna fizet Bálintnak 300 forintot, ha nem ez a helyzet. Hosszabb távon kinek előnyös ez a megállapodás?

4. Az ABC háromszöget betűzzük pozitív körüljárás szerint. A háromszög szögei az A, B, illetve C csúcsnál rendre α, β és γ. A B csúcsot az A pont körül negatív irányban elforgatjuk α szöggel, majd az így kapott B_1 pontot a B pont körül negatív irányban elforgatjuk β szöggel, és végül az így nyert B_2 pontot a C pont körül negatív irányban γ szöggel elforgatva a B_3 pontba jutunk. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adottak a B, B_3 pontok és az ABC háromszög beírt körének O középpontja.

5. Töltsük ki a teret páronként kitérő egyenesekkel.

Második (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely H háromszöghöz található olyan e egyenes, hogy H-nak az e-re vonatkozó tükörképe H területének több, mint a $3/4$ részét lefedi.

2. Jelölje p_i az i-edik prímszámot, és legyen $Q_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. (Tehát pl. $Q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.) Igazoljuk, hogy az $1, 2, \dots, Q_k$ számok között pontosan $Q_k/2$ darab olyan van, amely a $p_1, \dots, p_k$ közül páratlan sokkal osztható.

3. Adottak az n és k pozitív egészek, ahol $n \geq k+2$. Legyenek továbbá az n elemű H halmaznak $A_1, \dots, A_m$ olyan k elemű részhalmazai, hogy

(1) H minden egyelemű részhalmaza előáll néhány A_i metszeteként; de

(2) az A_i-k közül bármelyiket elhagyva (1) már nem teljesül.

(a) Mutassuk meg, hogy $m \leq kn$.

(b) Lássuk be, hogy az A_i-k alkalmas megválasztásával $m \geq kn - k^2$ elérhető.