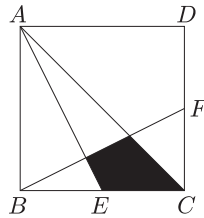


KEZDŐK

I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók Első (iskolai) forduló

1. Egy pozitív egész számot 4-gyel osztva 3, és 9-cel osztva 5 a maradék. Mennyi a maradék, ha a számot 36-tal elosztjuk? (6 pont)
2. Hány olyan legfeljebb 5 jegyű, 5-tel nem osztható természetes szám van, amelynek minden jegye prím? (6 pont)
3. Az $ABCD$ négyzet oldalainak hossza 30 cm. A BC oldal felezőpontja E , a CD oldal felezőpontja F . Számítsa ki a besötétített rész területét! (6 pont)



4. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza: befogói a és b , átfogója c . Az átfogójához tartozó magasság hossza m . Igazolja, hogy: $c + m > a + b$. (6 pont)

Második forduló

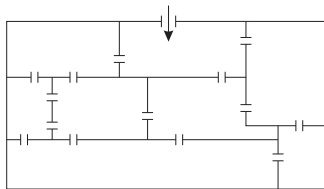
1. Hány olyan négyjegyű egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is? (6 pont)
2. Melyek azok a nem negatív x , y , és z egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 40. \quad (6 \text{ pont})$$

3. Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje AT az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe eső szakaszát, h az AT , R a köré írt és r a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h} = R - r. \quad (8 \text{ pont})$$

4. Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezelőtt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.



- a) Melyik ajtót falazták be?
- b) Melyik terem a trónterem? (10 pont)

5. Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást. (10 pont)

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy háromszög oldalai cm-ben mérve egész számok. Egyik oldala 2007 cm, a másik kettő legfeljebb ekkora. Hány ilyen háromszög van?

2. Egy négyzetrácsot 11 vízszintes és 11 függőleges vonal határoz meg. A vonalak metszéspontjai közül kijelölünk 20 pontot és bármelyik kettőt szakasszal kötünk össze. Mutassa meg, hogy e szakaszok között van négy azonos hosszúságú!

3. Legyen $A := x^{10}(y^5 - z^5) + y^{10}(z^5 - x^5) + z^{10}(x^5 - y^5)$. Igazolja, hogy ha x , y és z 11-gyel nem osztható pozitív egész számok, akkor $|A|$ osztható 11-gyel!

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

Megegyezik az I. kategória első fordulás feladatsorával.

Második forduló

Megegyezik az I. kategória második fordulás feladatsorával.

Harmadik (döntő) forduló

1. Ábrázolja azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát a síkon, amelyekre: $|y| \leq 2 - x^2$ és $|x| \leq 2 - y^2$ is teljesül! Igazolja, hogy e ponthalmaz területe több, mint 9 területegység!

2. Egy négyzetrácsot 11 vízszintes és 11 függőleges vonal határoz meg. A vonalak metszéspontjai közül kijelölünk 20 pontot és bármelyik kettőt szakasszal kötünk össze. Mutassa meg, hogy e szakaszok között van négy azonos hosszúságú!

3. Egy síkbeli zárt töröttvonal hossza 1 egység. Igazolja, hogy a töröttvonal által határolt tartomány lefedhető egy $\frac{1}{4}$ egység sugarú körrel!

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

Megegyezik az I. kategória második fordulás feladatsorával.

Második (döntő) forduló

1. Jelöljük $G(x)$ -szel egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész x szám számjegyeinek összegét! Hány olyan $1 \leq x \leq 2007$ pozitív egész szám van, melyhez létezik olyan $y > x$ pozitív egész szám, hogy $x + G(x) = y + G(y)$?

2. Defináljuk az a_n ($n \geq 0$) sorozatot a következőképpen: $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ és $n \geq 2$ -re $a_n := 6a_{n-1} - a_{n-2}$. Bizonyítsa be, hogy

$$(3 - 2 \cdot \sqrt{2})^n \cdot a_{n+1} - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^{n+1} \cdot a_n = 1$$

minden $n \geq 0$ -ra!

3. Adott egy egységnyi területű szabályos háromszög belsejében két pont úgy, hogy ez a két pont és a háromszög három csúcsa együtt 5 olyan pontot ad, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcsai az említett 5 pont közül valók és jelöljük ezen háromszögek területei közül a legkisebbet t_{\min} -nel! Mennyi t_{\min} lehetséges maximális értéke, és a két belső pont mely elhelyezkedése mellett érhető ez el?

HALADÓK

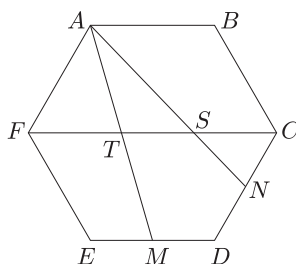
I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

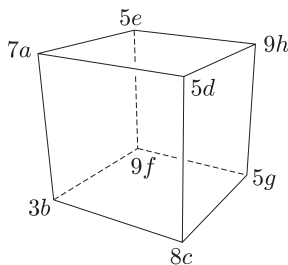
1. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevők csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszandó játszmák 24%-ára kerülne csak sor. Hány versenyző indult eredetileg a versenyen?

2. Az $ABCD$ téglalap BC és CD oldalának a C csúchoz közelebbi harmadolópontjai P , illetve Q . Az AP és AQ szakasszal három olyan részre osztottuk a téglalapot, amelyek közül kettőnek megegyezik a kerülete. Mekkora lehet ekkor a téglalap szomszédos oldalainak aránya?

3. Az ábrán látható szabályos hatszög ED és DC oldalainak M , illetve N a felezőpontja. Milyen arányban osztják az FC átlót a T és S pontok?



4. Egy kocka minden csúcsát két természetes számmal jelöltük meg, amelyek közül egyet egy betűvel eltakartunk. Így az egyik szám látható, a másik nem. Bármely csúcsnál lévő látható szám a csúccsal élszomszédos három, betűvel takart szám átlaga. Milyen számokat rejtene a betűk?



5. Egy gazda madárijesztő helyett hangágyúkkal próbálja távol tartani a madarakat földjétől. A hangágyún beállítható (egész másodpercekben) egy t riasztási idő, és minden t másodperc elteltével dördül egy nagyot. A t idő 60 és 90 másodperc közé esik.

A gazda különböző időre állította be két hangágyúját, hogy véletlenszerűnek tűnjön a dördülések ritmusa. Az első ágyú délelőtt 9 előtt 4 másodperccel szólalt meg, a másik pedig pontosan kilenckor. Később 10 óra után 4 másodperccel és 10 óra után 8 másodperccel is hallatszott egy-egy dördülés. Még később, valamikor 10 óra 10 perc és 10 óra 20 perc között a két eszköz pontosan egyszerre riasztott.

Határozzuk meg másodpercre pontosan, mikor dördültek el egyszerre a hangágyúk 10 óra 10 perc és 10 óra 20 perc között!

Második forduló

1. Mennyi lesz a $\left(\left(\left(\dots(7^7)^7\right)^7\dots\right)^7\right)^7$ kifejezés utolsó jegye, ha 2006-szor végeztük el a 7. hatványra emelést?

2. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló $(x; y)$ számpárokat, melyre teljesül, hogy

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 2x + 84.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglalap átlói által bezárt kisebbik szög 30° , akkor a téglalap belső szögfelezői által közrefogott négyszög területe megegyezik a téglalap területével.

4. A Tour de Hongrie kerékpáros körverseny távja 777 km. A szervezők, hogy megkönnyítsék a versenyzők dolgát, valamennyi résztvevőnek egy olyan kijelzőt adtak, amelyen kilométerenként felvillan a már megtett és a még hátralévő távolság. Azaz az indulás pillanatában (000;777), a célba érkezéskor (777;000), közben például (097;680) látható a kijelzőn.

Hány esetben fordul elő, hogy a kijelzőn felvillanó számsorban pontosan kétféle számjegy található?

Harmadik (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy 1111-től 2007-ig bármely egész szám osztója az alábbi összegnek:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 896 + \\ + & 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 897 + \\ + & 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 898 + \\ + & \dots \\ + & 1111 \cdot 1112 \cdot 1113 \cdot \dots \cdot 2006 \end{aligned}$$

2. Az R sugarú AB átmérőjű kört belülről érinti az r sugarú k kör az A pontban ($R > r$). Az R sugarú kör BC húrja az E pontban érinti a k kört. Ha a BE és CE szakasz mértani közepe megegyezik a két kör sugarának mértani közepével, akkor mekkora az $r : R$ arány értéke?

3. A Matematikai Kaszinóban a következő játékot játszhatjuk: 1-től 10 000-ig vannak számok egy urnában, ezek közül véletlenszerűen kihúznak egyet. Ha *szép* szám jött ki, kapunk n forintot, ha nem, be kell fizetnünk 1 forintot. A Kaszinóban *szépnek* nevezik azokat az a egész számokat, amelyek oszthatók negyedik gyökük egészrészével, tehát $\lfloor \sqrt[4]{a} \rfloor \mid a$.

(a) Hány *szép* szám van 1-től 10 000-ig?

(b) Melyik az a legkisebb egész n , amire érdemes játszani?

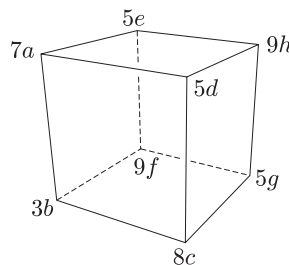
II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Melyik az a legnagyobb kettőhatvány, amivel a $2^{2005} + 10^{2005}$ osztható?

2. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken?

3. Egy kocka minden csúcsát két természetes számmal jelöltük meg, amelyek közül egyet egy betűvel eltakartunk. Így az egyik szám látható, a másik nem. Bármely csúcsnál lévő látható szám a csúccsal élszomszédos három, betűvel takart szám átlaga. Milyen számokat rejtenek a betűk?



4. A k_1 és k_2 körök kívülről érintik egymást. Az érintési ponton átmenő egyenes k_1 -et a P_1 , k_2 -t a P_2 pontban metszi másodszer. Megrajzoltuk a P_1 -en és P_2 -n áthaladó, k_1 -et érintő kört. Bizonyítsuk be, hogy ennek a körnek a sugara a k_1 és k_2 körök sugarának összegével egyenlő!

5. A Fiatal Matematikusok Konferenciájára 99 diák kapott meghívást. A résztvevők magyar, angol, német, olasz, francia, görög és török nemzetiségűek voltak. A szervezők észrevették, hogy nincs 8 különböző korú, azonos nemzetiségű résztvevő. Bizonyítsuk be, hogy van két azonos korú, nemű és nemzetiségű résztvevő a konferencián!

Második forduló

1. Határozza meg a következő kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét a valós számok halmazán:

$$K = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

2. Tekintsük az $N = 1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \dots + 2006^{2007}$ összeget!

- Bizonyítsuk be, hogy N nem négyzetszám.
- Igazoljuk, hogy $N + 4$ nem prímszám.

3. Az AB alapú ABC egyenlő szárú háromszög A csúcsból induló súlyvonalát harmadolja a B csúcsból induló magasság. Mekkora szögben látszik a háromszög S súlypontjából az AB alap?

4. A Tour de Hongrie kerékpáros körverseny távja 777 km. A szervezők, hogy megkönnyítsék a versenyzők dolgát, valamennyi résztvevőnek egy olyan kijelzőt adtak, amelyen kilométerenként felvillan a már megtett és a még hátralévő távolság. Tehát az indulás pillanatában (000; 777), a célba érkezéskor (777; 000), közben például (097; 680) látható a kijelzőn.

Hány esetben fordul elő, hogy a kijelzőn felvillanó számsorban nincs két egyforma számjegy?

Harmadik (döntő) forduló

1. Legyen α az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik valós gyöke, β pedig az $x^2 - px - q = 0$ egyik valós gyöke, ahol $p, q \in \mathbb{R}$ és $q \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 - 2px - 2q = 0$ egyenletnek van α és β közé eső valós gyöke!

2. Rajzoljuk meg azokat a köröket, amelyek átmennek egy tetszőleges háromszög egyik csúcsán és a csúcsból induló oldalak csúcshoz közelebbi harmadolópontjain! Bizonyítsuk be, hogy van olyan kör, amelynek sugara a megrajzolt körök sugarának számtani közepe, és mindhárom kört érinti.

3. Tekintsük a szabályos n -szög csúcsai által meghatározott összes háromszöget! Mekkora lehet n értéke, ha a háromszögek között pontosan ugyanannyi tompaszögű van, mint hegyesszögű?

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{8}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}} \leq 6 - \sqrt{x+1}?$$

2. Az ABC háromszög BM és CN súlyvonalának metszéspontja S , és tudjuk, hogy $AMSN$ érintőnégyyszög. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

3. Egy egységnyi élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet. A kocka A_1, B_1, C_1, D_1 csúcsaira teljesül, hogy AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 párhuzamosak. Az AC_1 testátló két harmadolópontja P és Q . A D_1P és a D_1Q egyenes az $ABCD$ lap síkját a K , illetve az E pontban metszi. Határozzuk meg az AK és az AE szakaszok hosszát!

4. Tekintsük azokat a pozitív egész számokat, amelyekre igaz, hogy számjegyeik összege és szorzata is 9^{2007} . Igazoljuk, hogy egyetlen megfelelő szám számjegyeinek száma sem lehet négyzetszám.

5. Egy kör területét 10 darab piros és 12 darab kék pont ívekre bont. Ezekre az ívekre számokat írunk a következő módon: két piros pont közötti ívre 2-t, két kék pont közötti ívre $\frac{1}{2}$ -et, egy piros és egy kék közti ívre 1-et.

Mennyi lehet ezeknek a számoknak a szorzata a piros és kék pontok különböző elrendezése esetén?

Második (döntő) forduló

1. Jelölje a_n a $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \dots, \binom{2n}{2n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját!

Mennyit ér az $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2007}\}$ halmaz legnagyobb eleme?

2. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek oldalai $n-1, n, n+1$, ahol n 2-nél nagyobb egész szám! Ha t_n jelöli az egyes háromszögek területét, akkor bizonyítsuk be, hogy a $\{t_n\}$ sorozat bármely tagjának végtelen sok egész számú többszöröse is tagja a sorozatnak.

3. Az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja S , az AB és AC oldalak felezőpontja X és Y . Tudjuk, hogy az AXY és BCS háromszögek köréírt köre érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög magasságpontját és köréírt körének középpontját összekötő szakasz merőleges az A -ból induló súlyvonalra!