A négyzetszámok reciprokösszege

Korábbi cikkemben ([4], 4. példa) már említettem a következő végtelen sort, amely Leibnizt 1673-ban mintegy elvezette az analízis alaptételéhez:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

Valójában sokkal elegánsabb a következő rokon sor, amelynek összegét több zseni sok évi küzdelme után Euler határozta meg ([2], [3]).

7. tétel (Euler, 1735). *A négyzetszámok reciprokösszege:*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Mindenekelőtt utalunk az algebra alaptételére: egy valós együtthatós n-edfokú polinomnak pontosan n valós vagy komplex gyöke van, ha k-szorosnak nevezünk egy olyan α gyököt, amelyre

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0.$$

Most pedig egy segédtételt mondunk ki és bizonyítunk be, amely speciális esetben (a másodfokú egyenletre) középiskolai tananyag.

1. segédtétel. *Tekintsük a*

$$p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

n-edfokú polinomot, $a_n\neq 0$ és jelölje $x_1,\ldots,x_n$ a polinom n gyökét. Ekkor

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Bizonyítás. Írjuk föl a polinomot gyöktényezős alakba:

$$p_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

és vegyük a jobb oldalon az x^{n-1} tagok együtthatóinak az összegét:

$$a_n(-x_1-x_2-\ldots-x_n),$$

s ez megegyezik az a_{n-1} együtthatóval. □

A 7. tétel heurisztikus bizonyítása. 1) Legyen az n-edfokú

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$$

egyenletnek n különböző gyöke: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Ekkor a gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján

$$a_{n-1}=-a_n(\alpha_1+\ldots+\alpha_n).$$

Ha egyik gyök sem nulla (azaz $a_0\neq 0$), akkor a gyökök reciprokai éppen az $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ egyenlet gyökei, amelyekre az előzőhöz teljesen hasonló módon a következő összefüggés írható föl:

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Írjunk x helyére x^2-et. Belátható, hogy a $2n$-edfokú

$$b_0-b_1x^2+\ldots+(-1)^nb_nx^{2n}=0$$

egyenletnek $2n$ darab gyöke n ellentett párt képez: $\pm\beta_1,\ldots,\pm\beta_n$. Ekkor a reciprok-négyzetösszegre:

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\ldots+\frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

2) Euler a $\sin x=0$, azaz a 3. példabeli Taylor-sorra áttérve, az

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\ldots=0$$

„végtelen fokú” egyenletet vizsgálta, amelynek gyökei $\{k\pi\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Elosztva az egyenletet x-szel, megszabadult az $x = 0$ gyöktől, az

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + \ldots = 0$$

„végtelen fokú” egyenletet kapta, melynek gyökei $\{\pm k\pi\}_{k=1}^{\infty}$. Az 1) pont „alapján”, $b_0 = 1$, $b_1 = 1/6$, tehát

$$\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \ldots + \frac{1}{(n\pi)^2} + \ldots\right).$$

Innen már átszorzással adódik a tétel. □

Mi a hiba a bizonyítással? a) Nincs garancia arra, hogy „végtelen fokú” polinomra is érvényes a gyökök és együtthatók közti összefüggés. b) Nem tudjuk, nincsenek-e egyéb, komplex gyökei a hatványsorként felfogott $\sin x$-nek.

Euler és társai többször is visszatértek a feladatra, és hosszas küzdelem után végül sikerült megnyugtató bizonyítást találniuk. De a heurisztikus megoldás addig is támaszt jelentett a kutatóknak. A bizonytalanság évtizedei alatt is sikerült Eulernak közelebb jutnia az igazsághoz. Például a 4. tételben már találkoztunk a Gregory–Leibniz-sorral. Heurisztikus módszerével Euler levezette ezt az összefüggést is, ezúttal az $1 - \sin x = 0$ egyenlet gyökeit és együtthatóit vizsgálta. Sőt, nem kímélve erejét, numerikusan is sok tizedesjegy pontossággal többféleképp meghatározta a sor értékét, hogy ellenőrizze ingatag bizonyítását. Az eredmény jónak bizonyult. Itt csak az elemi módszert vázoljuk, de Euler és Maclaurin egy bonyolultabb és kényesebb módszert is kidolgozott.

Tegyük föl, hogy a sor első n tagjának összegét pontosan (kézzel vagy számológéppel) meghatároztuk, és a maradékot becsüljük felül az $1/x^2$ függvény $[n, \infty]$ közti integráljával, amelynek értéke $1/n$. Belátható, hogy

$$s_n < s < s_n + \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Természetesen ha elég éles alsó és felső becslést akarunk kapni, akkor a képletet minél nagyobb n-re érdemes alkalmazni. Persze, akkor többet kell számolni. Ugyanakkor $n = 1$-re $1 < s < 2$ adódik, ami numerikusan nagyon durva közelítés.

A 4. táblázat mutatja a GWBASIC program egyszeres és kétszeres pontosságú alsó (S_n, illetve T_n) és felső ($S_n + 1/n$, illetve $T_n + 1/n$) becslést, $n = 10^k - 1$ esetén.

k	S_n	T_n	$S_n + 1/n$	$T_n + 1/n$
1	1,53977	1,53977	1,65088	1,65088
2	1,63488	1,63488	1,64499	1,64499
3	1,64393	1,64393	1,64493	1,64493
4	1,64473	1,64483	1,64483	1,64493
5	1,64473	1,64492	1,64474	1,64493
6	1,64473	1,64493	1,64473	1,64493

4. táblázat. Alsó és felső becslések $\zeta(2)$-re: $n = 10^k - 1$

Figyeljük meg, hogy az egyszeres pontosságú számolás már az $n = 10^4$-nél cserben hagy bennünket, és ezen a korrekció sem segít: az egyszeres pontosságú felső becslés 10^{-4}-nel kisebb a helyes értéknél. Ugyanez a becslés $n = 10^3$-nál még nemcsak, hogy megbízható, de véletlenül pontos is volt: 1,64493.

A 7. tétel első látásra túlzottan speciális, és szinte érthetetlen, hogyan lett az eredmény felfedezője egy csapásra világhíres. A látszat azonban csal. Euler kezében ez a tétel is varázspálcává változott. Az ún. zéta-függvény [1],

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

segítségével teljesen új módszereket vezetett be a számelméletbe, és e függvény segítségével a német *Bernhard Riemann* (1824–1866) pontos becsléseket adott a prímszámok eloszlására. A mai napig a matematika egyik legfontosabb sejtése a becslésben alkalmazott Riemann-sejtés. Aki bizonyíthatóan megoldja a sejtést, az egy amerikai magánalapítványtól 1 millió amerikai dollárt kap jutalmul. Képzelhetik, milyen nehéz lehet a probléma.

A Fourier-sorok

A rezgő húr (parciális differenciál)egyenletével kapcsolatban 1750–1770 között négy matematikai óriás, a már említett Euler mellett a szintén svájci *Daniel Bernoulli* (1700–1782), a francia *Jean d'Alembert* (1707–1783) és az olasz–francia *Louis-Joseph Lagrange* (1736–1813) is vitatkozott azon, hogy előállítható-e minden folytonos függvény trigonometrikus sorokkal. Képletben: minden, a $[0;2\pi]$ szakaszon értelmezett folytonos f függvényhez található-e olyan (a_k, b_k) együttható-sorozat, hogy

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots .$$

A fő gondot az okozta, hogy nem tudták pontosan, hogy mit is jelent a folytonos függvény. Jean d'Alembert hatványsorral leírható függvényekre gondolt, Euler bármilyen folytonos görbére.

Évtizedekkel később egy francia fizikus, *Joseph Fourier* (1768–1830) visszatért a kérdésre a hővezetéssel kapcsolatban. Két forradalmi újítását emeljük ki: *a*) az (a_k, b_k) együtthatók meghatározásához az f függvénynek nem kell sokszorosan differenciálhatónak lennie (mint a hatványsoroknál); *b*) két függvény megegyezhet a $[0;2\pi]$ intervallumon, és különbözhet azon kívül (nem úgy, mint a hatványsorok). Az elhúzódó publikálás előtt Fourier cikke már kéziratban is jelentős hatást fejtett ki. Újabb viták után (az egykori „kamasz” Lagrange még élt és 77 évesen még mindig hevesen vitatkozott) Fourier végül győzelemre vitte a trigonometrikus sorokat. Élvezetes leírást ad a kérdés történetéről Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete* [5] és Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok* [6] című könyvében.

Mai szemmel nézve az alapgondolat egyszerű. „Jól viselkedő” függvények Fourier-együtthatóit ugyanúgy számítjuk ki, mint a közönséges síkban egy vektor koordinátáit, a skalárszorzat segítségével. Lássuk először az utóbbiakat: legyen $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ egy síkvektor, ahol v_1, v_2 a két koordináta és $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a két egymásra merőleges egységvektor, ún. ortonormált bázis. Ugyancsak legyen $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$. Ekkor a két vektor skalárszorzatát a következőképp definiáljuk: $\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2$. Speciálisan: $\mathbf{v}\mathbf{e}_1 = v_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$, és $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$ miatt $\mathbf{v}\mathbf{e}_1 = v_1$. Tehát a v_i koordináta a $\mathbf{v}$ vektor és az $\mathbf{e}_i$ egységvektor skalárszorzata.

A $[0;2\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében két függvény hajlásszögét, pontosabban annak koszinuszát célszerű a következőképp definiálni. Vegyük a szorzatfüggvény integrálját (ezt nevezzük a két függvény skalárszorzatának), és osszuk el a négyzetfüggvények integrál-négyzetgyökének a szorzatával:

$$\cos(f,g) = \frac{\int_0^{2\pi} fg}{\sqrt{\int_0^{2\pi} f^2 \int_0^{2\pi} g^2}}.$$

Ezen definíció szerint a $(\cos kx)$ és a $(\sin kx)$ függvények ortogonális bázist alkotnak e térben, azaz a fenti példához hasonlóan minden függvény felírható e báziselemek (véges vagy végtelen) lineáris kombinációjaként. Itt csak a merőlegességre utalunk: a nevezetes szögfüggvényképlet alkalmazásával adódik

$$2\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \, dx = \int_0^{2\pi} \big[\sin(l+k)x - \sin(l-k)x\big]\, dx = 0 - 0 = 0.$$

4. feladat. Igazoljuk, hogy *a*) $k \neq l$ esetén

$$2\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = 0 = 2\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx,$$

valamint *b*)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2} = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx.$$

Innen már adódik a

8. tétel (Euler, kb. 1760). *Egy függvény Fourier-együtthatói formálisan a következőképpen számíthatók ki:*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Bizonyítás. Szorozzuk be az f függvény formálisan értelmezett Fourier-sorát tagonként $\cos mx$-szel és a szorzatot integráljuk a $[0;2\pi]$ intervallumon. Az ortogonalitás miatt minden tag kiesik, kivéve a $\cos mx$-et, amelynek a négyzetintegrálja π, ha $m > 0$ és 2π, ha $m = 0$. Ugyanígy kiszámítható a $\sin mx$ együtthatója is. $\square$

A következő fontos példát az egy pontban lassan konvergáló Fourier-sorra a norvég *Niels Abel* (1802–1829) találta.

9. tétel (Abel, 1826). *A* $[0;2\pi]$ *szakaszon definiált* $f(x) = (\pi - x)/2$ *függvény Fourier-együtthatói* $a_k = 0$, $b_k = 1/k$. *Valóban, parciális integrálással belátható, hogy*

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Figyeljük meg, hogy ez a Fourier-sor nemcsak a $[0;2\pi]$ szakaszon van értelmezve, hanem az egész $(-\infty,\infty)$ intervallumon, természetesen 2π szerint periodikus. Definiáljuk most az $f(x)$ függvényt is 2π szerint periodikusnak:

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Ekkor viszont az $x_k=2k\pi$ pontokban a fenti f függvénynek szakadása van. Ahhoz, hogy a képlet a szakadási pontokban is értelmes maradjon, a bal és a jobb oldali határérték számtani közepét vehetjük:

$$f(2k\pi)=\frac{f(2k\pi-0)+f(2k\pi+0)}{2}.$$

5. feladat. Számítógép segítségével határozzuk meg a 9. tételben szereplő Fourier-közelítés értékét az $x_1=\pi-0{,}5$, $x_2=\pi-0{,}05$ és $x_3=\pi-0{,}005$ helyen $n=10, 100, 1\,000, 10\,000$ tagszámra. Vizsgáljuk meg a konvergenciasebességet.

Megemlítjük a Pitagorasz-tétel Fourier-sorokra történő általánosítását.

10. tétel (Parseval-tétel, 1799). *Ha f egy négyzetesen integrálható függvény, akkor a Fourier-együtthatókra igaz a következő:*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx=2a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Bizonyítás. Írjuk föl a függvény Fourier-sorának négyzetét kifejtve, integráljuk a kettős összeget tagonként, és vegyük figyelembe az ortogonalitást. □

Végül visszatérünk Euler nevezetes feladatához.

4. példa. Alkalmazva a Parseval-tételt a 10. tételre, igazolható a 7. tétel. Valóban,

$$\frac{\pi^3}{6}=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Következtetések

A történetet befejeztük. A történet elmondása közben megismerkedtünk a szám-, a hatvány- és a trigonometrikus sorokkal. Segítségükkel egyrészt néhány transzcendens függvény helyettesítési értékét táblázat nélkül kiszámoltunk, másrészt végtelen sorokat zárt alakban előállítottunk. Láttuk, hogy az éles matematikai eszközök hatékony alkalmazásához ügyességre van szükség.

A konkrét eredmények mellett legalább olyan fontosnak tartom az elvont mondanivalót. A matematika 1670–1830 közti sikerének a kulcsa éppen az ókori görögök által létrehozott szabatosság alól való felszabadulás volt. Csak az ingatag talajon való előrehaladás során derültek ki a nehézségek, és vált lehetővé az analízis szilárd megalapozása. Ez azonban már nem középiskolás anyag.

Az oktatásban szokásos deduktív úttal szemben, a matematika valóságos történeti fejlődése gyakran induktív utat követett. Korábbi példáinkra utalva, Gregory, Newton és Leibniz nem az általános Taylor-formulából vezették le a speciális függvények hatványsorát, hanem megfordítva, kellő számú konkrét hatványsor meghatározása után ráéreztek az általános tételre. Hasonlóan, nem a Parseval-tétel és a Fourier-sor segítségével határozta meg Euler a $\zeta(2)=\pi^2/6$ értéket, hanem fordítva: a konkrét feladat megoldása nyomán vetődtek fel az általános fogalmak és tételek.

Lakatos Imre, világhírű tudománytörténész gondolatmenetével zárom e cikket: több évtizedig tartott, amíg a szabatos konvergenciafogalom utat tört magának a matematikában. S miután nagy nehezen bevezették e fogalmat, még sokáig késlekedtek a következetes alkalmazásokkal. Hamis tehát az a beállítás, hogy a matematikai eredmények rögtön definíció–tétel–bizonyítás szerkezettel születtek meg, mint ahogyan a mítosz szerint Pallasz Athéné teljes fegyverzetben ugrott ki apja, Zeusz fejéből.

Feladatmegoldások

4. feladat.

a) $$2\int_0^{2\pi}\cos kx\cos lx\,dx=\int_0^{2\pi}\big[\cos(l-k)x-\cos(l-k)x\big]\,dx=0-0=0.$$

b) $$2\int_0^{2\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_0^{2\pi}(1+\cos 2kx)\,dx=2\pi.$$

n	$S_n(x_1)$	$S_n(x_2)$	$S_n(x_3)$
10	0,29180	0,00113	0,00000
100	0,25007	0,02974	0,00010
1 000	0,25034	0,02512	0,00298
10 000	0,25002	0,02502	0,00251
Pontos	0,25000	0,02500	0,00250

5. táblázat. A Fourier-sor közelítése

5. feladat.
Az első oszlopban gyors, a másodikban közepes, és a harmadikban pedig lassú a konvergencia. Az egyenletes konvergencia hiánya okozza a gondokat.

Hivatkozások

[1] Freud, R.–Gyarmati, E., *Számelmélet,* Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2000).

[2] Gingyikin, Sz. G., *Történetek fizikusokról és matematikusokról,* 3. orosz kiadás fordítása. Typotex, javított kiadás (Budapest, 2004).

[3] Pólya, Gy., *Indukció és analógia: A matematikai gondolkodás művészete I,* Gondolat (Budapest, 1988).

[4] Simonovits, A., *Hogyan született az analízis?,* Középiskolai Matematikai Lapok, 2006/4. szám, 194–204.

[5] Simonyi, K.: *A fizika kultúrtörténete,* Gondolat, 2. bővített kiadás (Budapest, 1981).

[6] Szőkefalvi-Nagy, B., *Valós függvények és függvénysorok,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1965).