I. rész

1. *Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az* $(5;5)$ *pont, továbbá az* $(x+2)^2+(y-4)^2=10$ *egyenletű kört az* $(1;3)$ *pontban érinti.* (*11 pont*)

Megoldás. Az adott kör középpontjának koordinátái: $(-2;4)$. A keresett kör középpontja rajta van az $(1;3)$ és a $(-2;4)$ pontokra illeszkedő $x+3y=10$ egyenletű egyenesen. A keresett kör középpontja rajta van az $(1;3)$ és az $(5;5)$ pontok által meghatározott húr felezőmerőlegesén is, a $2x+y=10$ egyenletű egyenesen. A két egyenes metszéspontja, vagyis a kör középpontjának koordinátái: $(4;2)$.

A kör sugarának hosszát az $(1;3)$ és a $(4;2)$ pontok távolságaként számíthatjuk ki: $\sqrt{10}$.

A keresett kör egyenlete:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=10.$$

2. *A* Sajó sóder *nevű cukorkát ötvenesével csomagolják. A minőségellenőrzéskor megállapították, hogy csak* 0,9 *valószínűséggel találunk pontosan* 50 *darabot a csomagokban.*

a) Mekkora az esélye annak, hogy hat csomag cukorkát vásárolva mindegyik csomagban 50 *darab cukorka lesz?*

b) Mekkora az esélye, hogy a hat csomag között legalább két olyan csomag van, amelyben nem 50 *darab cukorkát találunk?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Feltételezzük, hogy a vásárlásnál egymástól függetlenül, véletlenszerűen választottuk ki a csomagokat. A keresett valószínűség: $0{,}9^6\approx 0{,}531$.

Vagyis 0,531 az esélye annak, hogy hat csomag cukorkát vásárolva mindegyik csomagban 50 darab cukorka lesz.

b) A keresett valószínűség:

$$1-(0{,}9^6+6\cdot 0{,}9^5\cdot 0{,}1)\approx 0{,}114.$$

Vagyis 0,114 az esélye, hogy a hat csomag között legalább két olyan csomag van, amelyben nem 50 darab cukorkát találunk.

3. *Határozzuk meg az* $A\cap B$ *halmazt, ha* $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 3(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)=2\sqrt{3}\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 2\}$. (*14 pont*)

Megoldás. Megoldjuk a $3(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)=2\sqrt{3}$ egyenletet. Ez $3\operatorname{tg}^2x+2\sqrt{3}\operatorname{tg}x-3=0$ alakra rendezhető, amiből $\operatorname{tg}x$ lehetséges értékei: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ vagy $-\sqrt{3}$. Vagyis

$$x_1=\frac{\pi}{6}+k_1\pi,\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+k_2\pi,\quad \text{ahol}\quad k_1,k_2\in\mathbb{Z}.$$

Az $|x|\le 2$ feltétel szerint $-2\le x\le 2$.

Vagyis

$$A\cap B=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right\}.$$

4. *Három különböző körkúpról tudjuk, hogy mind az alapkörük sugara, mind a kúpok magassága egy-egy azonos differenciájú számtani sorozat három egymást követő eleme. Mutassuk meg, hogy a kúpok térfogata nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme.* (*14 pont*)

Megoldás. Az alapkörök sugarai legyenek: $r-d$, r, $r+d$, a magasságok: $m-d$, m, $m+d$. Ekkor a térfogatok: $V_1=\frac{(r-d)^2\pi(m-d)}{3}$, $V_2=\frac{r^2\pi m}{3}$, $V_3=\frac{(r+d)^2\pi(m+d)}{3}$. Ha V_1, V_2, V_3 egy számtani sorozat három egymást követő eleme, akkor a $V_3-V_2=V_2-V_1$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Számoljuk ki ezeket a különbségeket:

$$V_3-V_2=\frac{(r+d)^2\pi(m+d)}{3}-\frac{r^2\pi m}{3}=\frac{\pi}{3}\left[(r+d)^2(m+d)-r^2m\right]=$$

$$=\frac{\pi}{3}(d^3+r^2d+2rd^2+2rmd+md^2),$$

$$V_2-V_1=\frac{r^2\pi m}{3}-\frac{(r-d)^2\pi(m-d)}{3}=\frac{\pi}{3}\left[r^2m-(r-d)^2(m-d)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{3}(d^3+r^2d-2rd^2+2rmd-md^2).$$

Látható, hogy a két különbség csak $d=0$ esetén lehetne egyenlő, de a kúpok különbözőek, ezért $d\ne 0$. A kúpok térfogata nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme.

II. rész

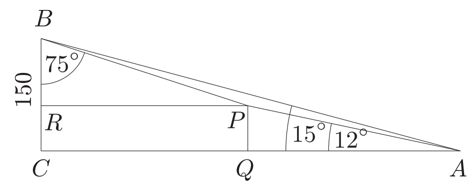
5. *Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 150 egység, egyik hegyesszöge 15°. A háromszög egy belső P pontját kössük össze az átfogó két végpontjával. Ezek a szakaszok és a két befogó olyan konkáv négyszög oldalai, melynek hegyesszögei 12° és 72°.*

a) Az átfogó melyik végpontjához van közelebb a P pont?

b) Milyen távol van a hosszabbik befogótól a P pont?

c) Mekkora a szóban forgó konkáv négyszög területe? (*16 pont*)

Megoldás. Készítsünk egy *vázlatrajzot* a feladat szövege alapján.



a)

$$PAB\sphericalangle = CAB\sphericalangle - CAP\sphericalangle = \\ = 15^\circ - 12^\circ = 3^\circ,$$

$$ABP\sphericalangle = ABC\sphericalangle - PBR\sphericalangle = \\ = 75^\circ - 72^\circ = 3^\circ$$

(így $APB = 174^\circ$).

Mivel az ABP háromszögben két szög egyenlő, így $AP = BP$, vagyis a felvett belső pont az átfogó két végpontjától egyenlő távolságra van.

b) Az ABC derékszögű háromszögben $AB = \dfrac{150}{\sin 15^\circ}$. Az APB háromszögben a szinusztételt felírva: $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{\sin 3^\circ}{\sin 174^\circ}$, amiből

$$AP = \frac{\frac{150}{\sin 15^\circ} \cdot \sin 3^\circ}{\sin 174^\circ} \approx 290{,}2.$$

Az APQ derékszögű háromszögben $\sin 12^\circ = \dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{PQ}{290{,}2}$, amiből kapjuk a keresett távolságot: $PQ \approx 60{,}3$.

c) Az ABC háromszög területéből vonjuk le az APB háromszög területét.

Mivel $\operatorname{tg} 75^\circ = \dfrac{AC}{150}$, így $AC \approx 559{,}8$.

$$t_{ABC} = \frac{150 \cdot 559{,}8}{2} = 41\,985, \qquad t_{APB} = \frac{290{,}2 \cdot 290{,}2 \cdot \sin 174^\circ}{2} \approx 4401{,}5.$$

A négyszög területe: $t = 41\,985 - 4401{,}5 = 37\,583{,}5$.

6. *Tekintsük az $y = (p-1)x^2 + 2px + 4$ egyenletű parabolákat, ahol p 1-től különböző tetszőleges valós szám.*

a) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre a parabolának nincs közös pontja az x tengellyel?

b) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek a fenti parabolasereg valamennyi elemére illeszkednek.

c) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a $(p-1)x^2 + 2px + 4 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege 5 legyen. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Olyan p értéket keresünk, amelyre a $(p-1)x^2 + 2px + 4 = 0$ másodfokú egyenletnek nincs esetén nemnegatív, vagyis a parabolának mindig van közös pontja az x tengellyel.

b) Rendezzük a parabolasereg egyenletét a p hatványai szerint:

$$y = (x^2 + 2x)p - (x^2 - 4).$$

Látható, hogy ha a p együtthatója 0, akkor y értéke nem függ a p-től. Ez akkor teljesül, ha $x = 0$ vagy $x = -2$. Így minden adott típusú parabola áthalad a $(0; 4)$, illetve a $(-2; 0)$ pontokon. További ilyen pont pedig nincs, mert három különböző pont egyértelműen határoz meg egy legfeljebb másodfokú függvényt.

c)

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-2p}{p-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{p-1} = \frac{4p^2 - 8p + 8}{(p-1)^2} = 5,$$

amiből a $p^2-2p-3=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei lesznek a keresett értékek: $p_1=-1$, $p_2=3$.

7. *Melyek azok az a, b egész számok, amelyekre $\lg(3a+2b)=\lg a+\lg b$?* (*16 pont*)

Megoldás. A logaritmus definíciója miatt: $a>0$, $b>0$.

A logaritmus azonosságai szerint: $\lg(3a+2b)=\lg ab$, azaz $3a+2b=ab$. Ezt írjuk a következő alakban: $6=ab-3a-2b+6$. Bontsuk szorzattá a jobb oldalon álló kifejezést: $6=(a-2)(b-3)$. A következő értékek jöhetnek szóba:

$a-2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$b-3$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
a	-4	-1	0	1	3	4	5	8
b	2	1	0	-3	9	6	5	4

A feltételeknek a $(3;9)$, $(4;6)$, $(5;5)$, $(8;4)$ számpárok felelnek meg.

8. *Az $f(x)=\sqrt{x}$ hozzárendeléssel megadott, a $[0;a]$ intervallumon értelmezett függvény görbéjét megforgatjuk az x tengely körül.*

a) Határozzuk meg azt a legnagyobb a egész számot, amelyre a keletkezett forgástest térfogata nem haladja meg az 1000 térfogategységet.

b) Írjuk fel az érintő egyenletét az f grafikonjának 4 abszcisszájú pontjában. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát. Tudjuk, hogy az nem haladja meg az 1000 térfogategységet. A kérdés úgy értelmes, ha $a>0$.

$$V=\pi\int_0^a\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^a xdx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{a^2\pi}{2}\le 1000.$$

Innen $a\le 25$, tehát a keresett legnagyobb egész szám a 25.

b) Határozzuk meg a deriváltat:

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Az érintő meredeksége:

$$f'(4)=\frac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

Az $x=4$ abszcisszájú pont koordinátái: $(4;2)$.

Az érintő egyenlete:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4).$$

9. *Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a $4\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ összeg minimális. Mennyi ez a legkisebb érték?* (*16 pont*)

Megoldás. Hegyesszögek esetén a $4\cos^2 x$ és a $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ is értelmezve van és pozitív.

Ismerjük két pozitív szám esetén a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget: $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$. Egyenlőség $a=b$ esetén van.

Alkalmazzuk ezt $a=4\cos^2 x$ és $b=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ értékekre:

$$\sqrt{4\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\le\frac{4\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}{2},$$

amit így írhatunk:

$$4=2\cdot\sqrt{4\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\le 4\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

A kifejezés értéke akkor lehet 4, ha $4\cos^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Ha x hegyesszög, akkor ez ekvivalens a $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ feltétellel, ami most pontosan akkor teljesül, ha $x=\dfrac{\pi}{4}$.