I. rész

1. *Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-3)$, $B(8;1)$ és $C(2;5)$.*
a) Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét.
b) Számítsuk ki a háromszög legnagyobb belső szögét. *(11 pont)*

Megoldás. *a)* A BC-re illeszkedő a oldalegyenes egyik irányvektora: $\mathbf{v}_a(3;-2)$. Az a egyenes egyenlete: $2x+3y=19$.

Az AC-re illeszkedő b oldalegyenes egyik irányvektora: $\mathbf{v}_b(1;2)$. A b egyenes egyenlete: $2x-y=-1$.

Az AB-re illeszkedő c oldalegyenes egyik irányvektora: $\mathbf{v}_c(5;2)$. Az c egyenes egyenlete: $2x-5y=11$.

b) Mivel $AB=\sqrt{116}$, $BC=\sqrt{52}$ és $AC=\sqrt{80}$, azért az AB-vel szemközti γ szög lesz a legnagyobb. A koszinusztételből $\cos\gamma=\dfrac{8}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{80}}\approx 0{,}1240$, így $\gamma\approx 82{,}9°$.

2. *a) Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.*
1) Egy négyszögnek lehet két oldalegyenese párhuzamos.
2) Egy négyszögnek lehet két szemközti oldalegyenese párhuzamos.
3) Egy négyszögnek lehet két szomszédos oldalegyenese párhuzamos.
4) Egy négyszögnek lehet két oldalegyenese merőleges.
5) Egy négyszögnek lehet két szemközti oldalegyenese merőleges.
6) Egy négyszögnek lehet két szomszédos oldalegyenese merőleges.
b) Ha valaki csak véletlenszerűen írja az igaz vagy hamis válaszokat az előző feladatban, akkor mekkora valószínűséggel lesz minden válasza helyes?
c) Az a) feladatban az is elképzelhető, hogy valaki nem tud dönteni. Valamelyik állítás esetén nem ír semmit. Hányféle válaszadás képzelhető el így összesen? *(12 pont)*

Megoldás. *a)* 1) igaz, 2) igaz, 3) hamis, 4) igaz, 5) igaz, 6) igaz.
b) Az összes lehetőség: $2^6=64$, a kedvező esetek száma: 1.
A keresett valószínűség: $\dfrac{1}{64}\approx 0{,}016$.
c) Egy válasz lehet: igaz, hamis, vagy üres: a lehetséges esetek száma: $3^6=729$.

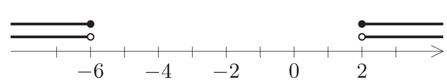
3. *Mely x-ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések:*
a) $\lg\sqrt{x^2+4x-12}$;
b) $\sqrt{\lg\left(x^2+4x-12\right)}$? *(14 pont)*

Megoldás. *a)* A négyzetgyök miatt: $x^2+4x-12\ge 0$. Szorzat alakban

$$(x+6)(x-2)\ge 0.$$

Innen: $x\in\,]-\infty;-6]\cup[2;\infty[$.

A logaritmus miatt: $\sqrt{x^2+4x-12}>0$, a négyzetgyök miatt $x^2+4x-12\ge 0$, azaz $(x+6)(x-2)>0$. Innen $x\in\,]-\infty;-6[\cup]2;\infty[$.

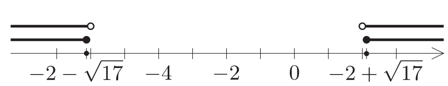


A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, ezért: $x\in\,]-\infty;-6[\cup]2;\infty[$.

b) A logaritmus miatt: $x^2+4x-12>0$. Az *a)* részben ezt már megvizsgáltuk, tehát $x\in\,]-\infty;-6[\cup]2;\infty[$.

A négyzetgyök miatt: $\lg\left(x^2+4x-12\right)\ge 0$, azaz $\lg\left(x^2+4x-12\right)\ge\lg 1$. A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, így

$$x^2+4x-12\ge 1,\quad\text{azaz}\quad x^2+4x-13\ge 0.$$



A másodfokú egyenlőtlenséget megoldva:

$$x\in\big]-\infty;-2-\sqrt{17}\,\big]\cup\big[-2+\sqrt{17};\infty\big[.$$

Ez utóbbi feltétel az erősebb, tehát ennek kell teljesülnie.

4. *Legyen* $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2$. *Számítsuk ki az* $f\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}\right)$ *helyettesítési értéket.* (*14 pont*)

Megoldás. Ha $y = x^2$, akkor a $g(y) = y^3 - 3y^2 + 3y$ értéket kell kiszámolnunk, ahol $y = \sqrt[3]{3} + 1$. Látható, hogy $g(y) = (y-1)^3 + 1 = 4$.

II. rész

5. *A koordinátarendszerben az origót kössük össze kétféleképpen az* $(a; a^2)$ *koordinátájú ponttal (a pozitív valós szám), először a két pontra illeszkedő egyenessel, majd a két pontra illeszkedő* $f(x) = x^2$ *hozzárendeléssel megadott függvény görbéjével. Mindkét esetben forgassuk meg az összekötő vonalat az* x *tengely körül.*

a) Számítsuk ki az így keletkezett két forgástest térfogatát, ha $a = 2$.

b) Adjuk meg az a *függvényében, hogy a kisebb test térfogata hány százaléka a nagyobb test térfogatának.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első esetben keletkezett egyenes kúp alapkörének sugara 4, a magassága 2. A kúp térfogata: $V_1 = \dfrac{r^2\pi m}{3} = \dfrac{32\pi}{3} \approx 33{,}51$. A második esetben kapott forgástest térfogata:

$$V_2 = \pi \int_0^2 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5} \approx 20{,}11.$$

b) Számoljunk az a paraméterrel! Az első esetben keletkezett egyenes kúp alapkörének sugara a^2, a magassága a. A kúp térfogata: $V_1 = \dfrac{a^4\pi a}{3} = \dfrac{a^5\pi}{3}$. A második esetben kapott forgástest térfogata:

$$V_2 = \pi \int_0^a x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{a^5\pi}{5}.$$

A második esetben kapott forgástest térfogata kisebb, mint az elsőé:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{a^5\pi}{5}}{\frac{a^5\pi}{3}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

A kisebb test térfogata 60%-a a nagyobb test térfogatának, ami nem függ a-tól.

6. *Határozzuk meg azokat a valós* x *értékeket, amelyekre*

$$\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+7}+3} : \frac{\sqrt{x+6}-1}{\sqrt{x+8}+4} \le 0.$$ (*16 pont*)

Megoldás. A négyzetgyökök miatt tett kikötések összegzése: $x \ge -5$. A két tört nevezője pozitív. Az osztás miatt a második tört számlálója nem lehet 0, azaz $x \ne -5$. Az értelmezési tartomány: $x \in\,]-5; \infty]$.

Mindkét tört nevezője pozitív, így az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a másik két tényező szorzata nem pozitív:

$$\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+6}-1\right) \le 0.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\left(\sqrt{x+5}+2\right)\left(\sqrt{x+6}+1\right)$ szorzattal: $(x+1)(x+5) \le 0$, ahonnan $x \in [-5; -1]$.

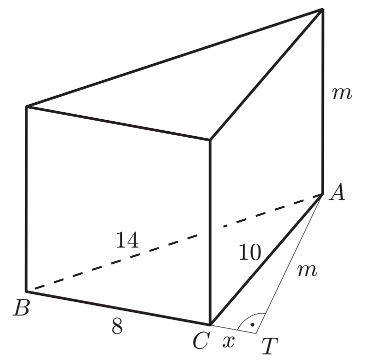
Az értelmezési tartományt figyelembe véve a megoldás: $x \in\,]-5; -1]$.

Megjegyzés. Ha az értelmezési tartomány meghatározása után $(x > -5)$ észrevesszük, hogy az egyenlőtlenségben szereplő négy tényező közül három pozitív, akkor rövidebb úton jutunk a megoldáshoz.

7. *a) Számítsuk ki annak a háromszög alapú egyenes hasábnak a térfogatát, amelynek alapélei* $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 14$ cm, *a hasáb* m *magasságáról pedig tudjuk, hogy* $m = m_a$, *ahol* m_a *az alapháromszög* a *oldalához tartozó magassága.*

b) Mekkora a térfogata annak a legnagyobb hengernek, amely elfér az előzőekben megadott hasábban és a tengelye párhuzamos a hasáb magasságával? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Készítünk egy vázlatrajzot, és használjuk az *ábra* jelöléseit.



Mivel $AB^2 > BC^2 + AC^2$, azért az $ACB\sphericalangle$ tompaszög, így az a oldalhoz tartozó m magasság a háromszögön kívül halad. A magasság talppontját T-vel jelöltük, legyen $CT = x$.

Az ABT háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint:

$$(8+x)^2 + m^2 = 196, \qquad 64 + 16x + x^2 + m^2 = 196.$$

Az ACT háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint: $x^2 + m^2 = 100$.

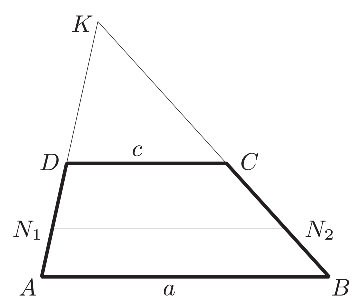
Ezt beírhatjuk az előző egyenletbe: $64 + 16x + 100 = 196$, amiből $x = 2$ (cm). Ezt felhasználva: $m = \sqrt{100-4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ (cm). Most már kiszámolhatjuk az ABC háromszög területét: $t = \dfrac{a \cdot m}{2} = \dfrac{8 \cdot 4\sqrt{6}}{2} = 16\sqrt{6}$ (cm^2). Végül meghatározzuk a hasáb térfogatát: $V_1 = tm = 16\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6} = 384$ (cm^3).

b) A henger alapkörének sugara egyenlő az ABC háromszög beírt körének ϱ sugarával. Az ABC háromszög területe: $t = 16\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$, a kerület fele: $s = 16$ cm. Alkalmazzuk a $t = \varrho s$ képletet: $\varrho = \dfrac{16\sqrt{6}}{16} = \sqrt{6}$.

A keresett henger térfogata: $V_2 = \varrho^2 \pi m = 6 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{6} = 24\pi\sqrt{6} \approx 184{,}7$ (cm^3).

8. *Egy trapéz alakú telket a szárak egy-egy pontját összekötő, a párhuzamos oldalakkal párhuzamos kerítéssel szeretnék két egyenlő területű részre vágni. Adjuk meg az építendő kerítés hosszát a trapéz két párhuzamos oldalhosszának függvényében.* (*16 pont*)

Megoldás. A területet felező párhuzamos szakasz hossza legyen $\overline{N_1N_2}$. A KDC, KN_1N_2, KAB háromszögek hasonlóak. A területeik aránya egyenlő a K-val szemközti oldalak négyzeteinek arányával. Ezért van olyan λ pozitív valós szám, hogy a három terület rendre: λc^2, $\lambda \cdot \left(\overline{N_1N_2}\right)^2$, λa^2.



A területfelezés miatt a középső háromszög területe a másik két háromszög területének a számtani közepe: $\lambda \cdot \left(\overline{N_1N_2}\right)^2 = \dfrac{\lambda a^2 + \lambda c^2}{2}$. Vagyis

$$\overline{N_1N_2} = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

9. *Adjuk meg a k paraméter azon értékeit, amelyekre a*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = k - \frac{1}{4}, \qquad \text{és a} \qquad \sin^4 x + \cos^4 x = k + \frac{1}{4}$$

egyenletnek is van megoldása. (*16 pont*)

Megoldás. Nézzük az első egyenletet:

$$k - \frac{1}{4} = \sin^4 x + \cos^4 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, azért $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x \leq 1$. Ha $\frac{1}{2} \leq k - \frac{1}{4} \leq 1$, azaz $\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{5}{4}$, akkor az első egyenletnek van valós megoldása.

Nézzük a második egyenletet, az előzőekben látott átalakításokat végezzük el most is: $k + \frac{1}{4} = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x$. Mivel $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, azért $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x \leq 1$. Ha $\frac{1}{2} \leq k + \frac{1}{4} \leq 1$, azaz $\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$, akkor a második egyenletnek van valós megoldása.

Azt szeretnénk, ha a két egyenletnek egyszerre lenne megoldása, ezért a két halmaz közös elemeit kell vennünk. Az egyedüli megoldás: $k = \frac{3}{4}$.