

## I. rész

1. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az  $(5; 5)$  pont, továbbá az  $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$  egyenletű kört az  $(1; 3)$  pontban érinti. (11 pont)

2. A *Sajó soder* nevű cukorkát ötvenesével csomagolják. A minőségellenőrzéskor megállapították, hogy csak 0,9 valószínűséggel találunk pontosan 50 darabot a csomagokban.

a) Mekkora az esélye annak, hogy hat csomag cukorkát vásárolva mindegyik csomagban 50 darab cukorka lesz?

b) Mekkora az esélye, hogy a hat csomag között legalább két olyan csomag van, amelyben nem 50 darab cukorkát találunk? (12 pont)

3. Határozzuk meg az  $A \cap B$  halmazt, ha  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$ . (14 pont)

4. Három különböző körkúpról tudjuk, hogy mind az alapkörük sugara, mind a kúpok magassága egy-egy azonos differenciájú számtani sorozat három egymást követő eleme. Mutassuk meg, hogy a kúpok térfogata nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme. (14 pont)

## II. rész

5. Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 150 egység, egyik hegyesszöge  $15^\circ$ . A háromszög egy belső  $P$  pontját kössük össze az átfogó két végpontjával. Ezek a szakaszok és a két befogó olyan konkáv négyszög oldalai, melynek hegyesszögei  $12^\circ$  és  $72^\circ$ .

a) Az átfogó melyik végpontjához van közelebb a  $P$  pont?

b) Milyen távol van a hosszabbik befogótól a  $P$  pont?

c) Mekkora a szóban forgó konkáv négyszög területe? (16 pont)

6. Tekintsük az  $y = (p - 1)x^2 + 2px + 4$  egyenletű parabolákat, ahol  $p$  1-től különböző tetszőleges valós szám.

a) Van-e a  $p$  paraméternek olyan értéke, amelyre a parabolának nincs közös pontja az  $x$  tengellyel?

b) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek a fenti parabolareg valamennyi elemére illeszkednek.

c) Határozzuk meg a  $p$  paraméter értékét úgy, hogy a  $(p - 1)x^2 + 2px + 4 = 0$  egyenlet gyökeinek négyzetösszege 5 legyen. (16 pont)

7. Melyek azok az  $a$ ,  $b$  egész számok, amelyekre  $\lg(3a + 2b) = \lg a + \lg b$ ? (16 pont)

8. Az  $f(x) = \sqrt{x}$  hozzárendeléssel megadott, a  $[0; a]$  intervallumon értelmezett függvény görbét megforgatjuk az  $x$  tengely körül.

a) Határozzuk meg azt a legnagyobb  $a$  egész számot, amelyre a keletkezett forgástest térfogata nem haladja meg az 1000 térfogategységet.

b) Írjuk fel az érintő egyenletét az  $f$  grafikonjának 4 abszcisszájú pontjában. (16 pont)

9. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a  $4 \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$  összeg minimális. Mennyi ez a legkisebb érték? (16 pont)