I. rész

1. 50 *liter* 80%*-os töménységű etilalkoholt tartalmazó edényből valamennyit kivettünk, majd a hiányt vízzel pótoltuk. Ezután a keverékből* 3 *literrel kevesebbet vettünk ki, mint előzőleg, és ezt a hiányt is vízzel pótoltuk. Jelenleg az edényben az etilalkohol és a víz mennyisége azonos. Hány liter folyadékot vettünk ki először?*

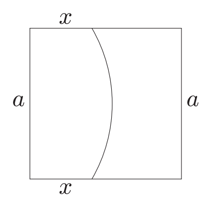
Megoldás. Az alkohol eredeti mennyisége az edényben: $50 \cdot 0{,}8 = 40$ liter. Az x liter kivétele után $40 - x \cdot 0{,}8$ liter alkohol marad az edényben. Az oldat $\dfrac{40 - x \cdot 0{,}8}{50} \cdot 100$ százalékos töménységű lesz, ha a hiányt vízzel pótoljuk.

A következő alkalommal $(x-3) \cdot \dfrac{40 - x \cdot 0{,}8}{50}$ liter alkoholt veszünk ki. Felírható a következő egyenlet:

$$40 - x \cdot 0{,}8 - (x-3) \cdot \frac{40 - x \cdot 0{,}8}{50} = 25.$$

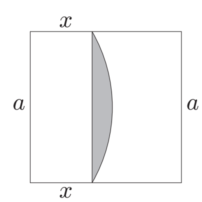
Rendezzük és megoldjuk a másodfokú egyenletet, a feladatnak csak az egyik gyök lesz megoldása: $x \approx 11{,}94$ liter.

2. *Fejezzük ki az x értékét az a segítségével, ha tudjuk, hogy az a sugarú körív felezi az a oldalú négyzet területét.*



Megoldás. A satírozott körszelet területe T (*1. ábra*), ekkor:

$$ax + T = \frac{a^2}{2}.$$



1. ábra

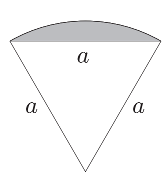
A *2. ábrán* látható, hogy a körszelethez tartozó középponti szög 60°-os. Ebből adódóan:

$$T = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ezt behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$ax + \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Vagyis: $x = a\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}41a$.



2. ábra

3. *Szabadon engedtünk* 41 *méhet egy téglatest alakú helyiségben melynek élhosszúságai:* 5 m, 4 m, 2 m. *Bizonyítsuk be, hogy bármely időpillanatban létezik* 2 *olyan méhecske, melyek távolsága* 1,8 m*-nél kisebb.*

Megoldás. A helyiség térfogata 40 m^3. Osszuk fel a helyiséget 40 db 1 m^3 térfogatú kockára, és tekintsük a méhecskéket pontszerűnek. Minden méhecske tartozzon ahhoz a kockához, amelyikben tartózkodik. (A határfelületen tartózkodó méhecskéket is soroljuk hozzá valamely olyan kockához, melynek a határfelületén tartózkodnak.) A skatulya-elv értelmében lesz legalább egy olyan kocka, amelyhez két méhecske tartozik. E két méhecske távolsága kisebb, mint 1,8 m, hiszen az 1 m élhosszúságú kocka testátlója $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ m hosszú.

4. *a) Valaki autóvásárlásra* 10 000 *euró kölcsönt vett fel* 10 *év futamidőre, évi* 8% *kamatra, évenkénti törlesztéssel. Mennyit kell évente visszafizetnie? (A törlesztő részlet minden évben azonos.)*

b) Legalább hány évre kell felvennie a kölcsönt, ha legfeljebb évi 2200 *eurót szeretne visszafizetni?*

Megoldás. *a)* Minden egyes x évi részlet visszafizetésével az x részlet hátralévő kamatainak megfizetésétől is mentesül. Ennek alapján felírható:

$$10\,000 \cdot 1{,}08^{10} - x \cdot 1{,}08^9 - x \cdot 1{,}08^8 - x \cdot 1{,}08^7 - \ldots - x \cdot 1{,}08^2 - x \cdot 1{,}08 - x = 0.$$

Ezt átírhatjuk a következő alakba a mértani sorozat összegképlete alapján:

$$10\,000 \cdot 1{,}08^{10} - x \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1} = 0.$$

Ezt megoldva: $x \approx 1490{,}3$ euró.

b) Az előző feladatrészhez hasonló megfontolással felírható:

$$10\,000 \cdot 1{,}08^n - 2200 \cdot \left(\frac{1{,}08^n - 1}{1{,}08 - 1}\right) = 0.$$

Ennek megoldása: $n \approx 5{,}87$.

Tehát legalább 6 évre kellene felvennie a kölcsönt.

II. rész

5. *a) Oldjuk meg a* $\sin 2x + 1 = 3(\sin x + \cos x) - 2$ *egyenletet.*

b) Milyen n *természetes számra lesz a* $3 \cdot 5^n + n^2 + 4n + 4$ *kifejezés osztható* 100*-zal?*

Megoldás. *a)* Alkalmazva a megfelelő összefüggéseket, a feladat egy másodfokú egyenletre vezet:

$$2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 3(\sin x + \cos x) - 2,$$

$$(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0.$$

Ennek megoldásai: $(\sin x + \cos x)_1 = 2$ és $(\sin x + \cos x)_2 = 1$.

A $\sin x + \cos x = 2$ nem vezet megoldásra.

A $\sin x + \cos x = 1$ esetén $x_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ és $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ adódik.

b) A $3 \cdot 5^n + n^2 + 4n + 4$ kifejezés $n = 0$ és $n = 1$ esetén nem osztható 100-zal. Az 5^n kifejezésről $n \geq 2$ esetén könnyen belátható, hogy 25-re végződik. Ebből adódóan a $3 \cdot 5^n$ két utolsó számjegye 75. A 100-zal való oszthatóság feltétele, hogy $n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$ 25-re végződjön. Könnyű belátni, hogy egy természetes szám négyzete akkor és csak akkor végződik 25-re, ha a természetes szám utolsó számjegye 5. Tehát $n = 3 + k \cdot 10$ ahol k nemnegatív egész szám.

6. *Adottak a következő függvények:*

$$f\colon x \in [-5; 10[\,, \qquad x \mapsto \big|\big||x-2| - 2\big| - 2\big|,$$

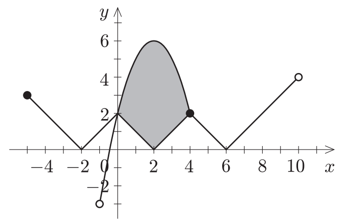
$$g\colon x \in\,]-1; 4]\,, \qquad x \mapsto -x^2 + 4x + 2.$$

a) Ábrázoljuk közös koordináta rendszerben az f *és a* g *függvényeket.*

b) Milyen x *értékekre igaz, hogy* $f(x) > g(x)$*?*

c) Számítsuk ki a két függvénygörbe által bezárt síkidom területét.

Megoldás. *a)*



b) $x \in \,]-1;0[$.

c) A kérdéses síkidomot két részre vágjuk. Az egyik egy háromszög, ennek a területe könnyen meghatározható, a másik rész területét integrálással számítjuk ki.

$$T = \frac{4 \cdot 2}{2} + \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\, dx = 4 + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{2} = 4 + \frac{32}{3} = \frac{44}{3}.$$

7. *Térképésztanulók* 3 *dimenziós koordináta-rendszerbe foglalták egy felülnézetből* 1000 m*-szer* 1000 m*-es nagyságú, négyzet alakú terepszakasz adatait. Az origó a terület délnyugati sarokpontja, melynek tengerszintfeletti magassága* 320 m*. A tereppontok koordinátái méterben értendők. Az első koordináta* (x) *a keleti, a második* (y) *pedig az északi irányban vett kiterjedést jelöli. A függőleges kiterjedéseket a koordinátahármasok harmadik tagja* (z) *jelöli. (z lehet negatív is.)*

a) *Milyen emelkedési szögben látszik az* $A(31;40;110)$ *magaslatról a* $B(221;52;340)$ *magaslat?*

b) *Mi az* A *és a* B *magaslatokat összekötő egyenes* x *és* y *tengelyek által meghatározott síkra vonatkozó merőleges vetületének egyenlete az* x, y *koordinátarendszerben?*

c) *Mekkora a tengerszint feletti magassága annak a sziklának, melynek* C *csúcsa a* $D(400;400;30)$, $E(500;500;30)$, $F(500;400;30)$ *pontokkal együtt* $100\,000\ \mathrm{m}^3$ *térfogatú gúlát határoz meg?*

Megoldás. *a*) Az AB szakasz egy olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik (függőleges) befogója $340 - 110 = 230$ m hosszú, másik befogójának hossza az A és a B pont x és y tengelyekkel kijelölt síkra vonatkozó merőleges vetületeinek távolsága:

$$\sqrt{(221-31)^2 + (52-40)^2} \approx 190{,}379 \text{ m}.$$

Az emelkedési szögre: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{230}{190{,}379}$, ebből $\alpha \approx 50{,}38^\circ$ adódik.

b) Az x, y rendszerben az $A'(31;40)$ és a $B'(221;52)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét kell felírni. Egyik irányvektora: $\mathbf{v}(190;12)$, normálvektora: $\mathbf{n}(-12;190)$. A kérdéses egyenes egyenlete: $-12x + 190y = 7228$.

c) A z koordináták egyenlők, azért a D, E, F pontok egy az x és y tengelyekkel kijelölt síkkal párhuzamos helyzetű háromszöget határoznak meg. A koordináták alapján a DEF háromszög egy 100 m hosszú befogókkal rendelkező egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek területe:

$$T = \frac{100 \cdot 100}{2} = 5000 \text{ m}^2.$$

A gúla térfogata: $V = \dfrac{T \cdot m}{3}$, azért

$$100\,000 = \frac{5000 \cdot m}{3}.$$

Innen $m = 60$ m, a C pont tengerszint feletti magassága kétféle lehet: $320+30+60 = 410$ m vagy $320+30-60 = 290$ m.

8. *Egy nagyvárosban* 21 *szolgáltatóház működik. Ezek közül tizenháromban vállalnak kulcsmásolást, tizenegyben képkeretezést, és nyolc szolgáltatóház vállal cipőjavítást. Az összes szolgáltatóház nyújtja valamelyiket az előző három szolgáltatás közül. Négy olyan szolgáltatóház van, ahol nem vállalnak képkeretezést, és cipőt sem javítanak. Három szolgáltatóház a kérdéses három szolgáltatás közül csak cipőjavítást nem vállal. Csak egy olyan szolgáltatóház van, amely cipőt javít, de a másik két szolgáltatást nem nyújtja.*

a) *Mutassuk meg, hogy nincs két olyan szolgáltatóház, amely mindhárom említett szolgáltatást nyújtja.*

b) *Hány olyan szolgáltatóház van, amely csak képet keretez a kérdéses három szolgáltatás közül?*

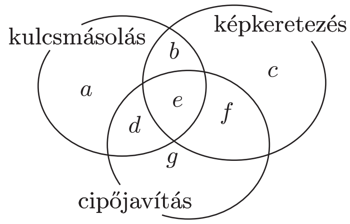
c) *Úgy értesültünk, hogy a következő héten valamelyik szolgáltatóház a kérdéses három szolgáltatás közül egy újat emel a profiljába. Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel lesz két olyan szolgáltatóház, amely mindhárom említett szolgáltatást nyújtja?*

Megoldás. Készítsük el a mellékelt diagramot, és gondolatban minden szolgáltatóházat helyezzünk el a megfelelő helyen. Az a, b, c, d, e, f, g betűk a tartományok által szemléltetett halmazok elemszámát jelentik.

a) A szövegből látható, hogy $a = 4$, $b = 3$, $g = 1$. Felírható:

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g &= 21, \\ a+b+d+e &= 13, \\ b+c+e+f &= 11, \\ d+e+f+g &= 8. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva: $e = 1$, ezzel igazoltuk az állítást.



b) Az előző egyenletrendszerből: $c = 6$.

c) Összesen 20 szolgáltatóház tud a feltételek mellett profilt bővíteni, ez az elemi események száma. A kedvező események száma: $b + d + f = 3 + 5 + 1 = 9$ (d és f értéke szintén az *a*) részben felírt egyenletrendszerből származik). A kérdéses valószínűség: $P = \dfrac{9}{20}$.

9. *Egy sportiskola 12 fős csoportjának néhány adatát tartalmazza a következő táblázat:*

Sorszám a naplóban	Testmagasság (cm)	Lábméret	Egyéni csúcs távolugrásban 2004-ben (cm)	Egyéni csúcs távolugrásban 2005-ben (cm)
1.	169	40	401	429
2.	180	42	432	425
3.	159	40	370	405
4.	191	45	520	531
5.	181	43	462	461
6.	176	44	448	482
7.	174	43	430	422
8.	170	42	419	426
9.	173	44	359	380
10.	188	44	602	581
11.	201	47	–	473
12.	169	40	388	388

a) *Számítsuk ki, hány százalékkal változtak a diákok egyéni csúcsai távolugrásban* 2004*-ről* 2005*-re? Állítsuk sorba a diákok naplóbeli sorszámát e változás növekvő sorrendje alapján.*

b) *Ábrázoljuk a lábméretek gyakoriságát, illetve relatív gyakoriságát a megfelelő diagramokon.*

c) *Hányféleképpen választható ki három diák úgy, hogy van köztük az átlagnál alacsonyabb is és magasabb is?*

Megoldás.

a) A növekedés mértékére kapott adatokat az *1. táblázat* tartalmazza. A naplóbeli sorszámok sorrendjét a növekedés mértékének növekvő sorrendje alapján a második táblázat mutatja. A 11. sorszámú diák esetén hiányzó adat miatt nem tudunk számolni.

Sorszám	A növekedés mértéke
1.	6,98%
2.	−1,62%
3.	9,46%
4.	2,12%
5.	−0,22%
6.	7,59%
7.	−1,86%
8.	1,67%
9.	5,85%
10.	−3,49%
11.	
12.	0,00%

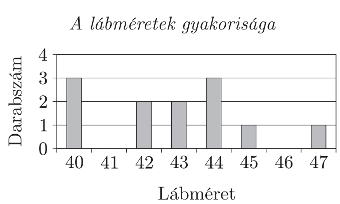
1. táblázat

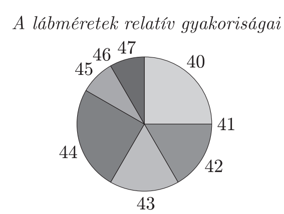
A növekedés mértéke	Sorszám
−3,49%	10.
−1,86%	7.
−1,62%	2.
0,22%	5.
0,00%	12.
1,67%	8.
2,12%	4.
5,85%	9.
6,98%	1.
7,59%	6.
9,46%	3.

2. táblázat

b) A táblázat mutatja a gyakoriságok és a relatív gyakoriságok értékeit.

Méret	40	41	42	43	44	45	46	47
Gyakoriság	3	0	2	2	3	1	0	1
Relatív gyakoriság	25%	0%	16,67%	16,67%	25%	8,33%	0%	8,33%





c) Az átlagmagasság értéke:

$$K = \frac{169 + 180 + 159 + 191 + 181 + 176 + 174 + 170 + 173 + 188 + 201 + 169}{12} \approx 177{,}58.$$

7 fő ennél alacsonyabb és 5 fő ennél magasabb.

Összesen

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$$

eredménye lehet a sorsolásnak. Ezek közül $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ esetben csupa az átlagmagasságnál alacsonyabb, $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ esetben csupa az átlagmagasságnál magasabb diák választódik ki. $220 - 35 - 10 = 175$ esetben lesz a három kisorsolt diák közt az átlagnál alacsonyabb és az átlagnál magasabb diák is.