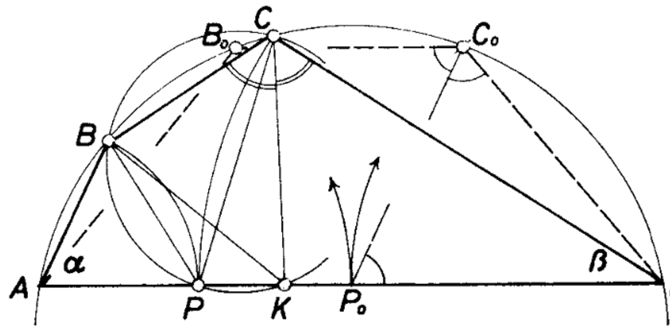
Azt fogjuk bizonyítani, hogy a BCD szög felezőjének az AD szakasszal való K metszéspontját B-vel összekötve, ez az egyenes felezi az ABC szöget. Ebből már következik, hogy K egyenlő távolságra van a DC, CB, valamint AB oldaltól, és mivel a hatszög szimmetrikus AD-re mint tengelyre, azért K a DE, EF és FA oldaltól is egyenlő távolságra van; így pedig a K körüli, AB-t érintő kör a hatszögnek mind a hat oldalát érinti.



Az $ABCD$ konvex húrnégyszögre vonatkozó állításunk akkor is helyes, ha AD a körnek tetszőleges húrja; ezért nem fogjuk felhasználni, hogy AD átmérő.

P-nek abban a P_0 helyzetében, amelyre $AP_0 = P_0D$, az ADC_0B_0 húrnégyszög szimmetrikus trapéz, $C_0B_0 \parallel DA$, és K_0 azonos P_0-lal, hiszen $DC = DP$ alapján $DC_0P_0\sphericalangle = DP_0C_0\sphericalangle = B_0C_0P_0\sphericalangle$, és a szimmetria alapján K_0B_0 is felezi az AB_0C_0 szöget, amint állítjuk.

Most már az általánosság csorbítása nélkül föltehetjük, hogy $AP < PD$ (más szóval: hogy a húrnak P-hez közelebbi végpontját jelöltük A-val). Így nyilván

$$\alpha = BAD\sphericalangle > B_0DA\sphericalangle = C_0DA\sphericalangle > CDA\sphericalangle = \beta.$$

A C-nél levő szög felezője AD-t a PD szakasz belsejében levő K-ban metszi, mert az ábra szerint, a forgásszögeket a CP alapiránytól mérve

$$PCK\sphericalangle = PCD\sphericalangle - KCD\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) - \frac{1}{2}BCD\sphericalangle =$$
$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0^\circ.$$

Eszerint P a BK egyenesnek C-t nem tartalmazó partján van.

A BK szakasznak C-ből és P-ből vett látószögeire viszont $AB = AP$ alapján fennáll

$$BCK\sphericalangle = \frac{1}{2}BCD\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - BAD\sphericalangle) = BPA\sphericalangle = 180^\circ - KPB\sphericalangle,$$

vagyis K, C, B, P ebben a sorrendben egy kör pontjai. Így pedig az előbbi számítás felhasználásával

$$ABK\sphericalangle = ABP\sphericalangle + PBK\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) + PCK\sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}ABC\sphericalangle.$$

Ezzel a kiindulásul kimondott állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Sok téves dolgozat született a következő megfontolás alapján: „Ha egy hatszögbe kör írható, akkor – mint egyszerűen belátható – 3–3 nem szomszédos oldala hosszainak összege megegyezik. Már pedig ez teljesül a kérdéses hatszögben.” Ámde ez az egyenlőség csak következmény, csak szükséges, de *nem elégséges feltétele* annak, hogy a hatszögbe kört lehessen írni. Kör köré írt *négy*szögre a megfordítás is igaz, de az iskolai anyagban ez sem kerül bizonyításra.

2. Mások félreértése az volt, hogy a *H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer*: Az újra felfedezett geometria c. könyv 127. oldalán olvasható tételben – „ha egy hatszög három átlója egy ponton megy át, akkor a hat oldal érinti ugyanazt a kúpszeletet, ...” – kúpszeletként csak körre gondoltak. – Mindkét téves hivatkozásra ellenpélda, ha egy helyes ábrának merőleges affin képeit vesszük AD-re mint tengelyre, egymás után két különböző λ arányszám mellett.

3. Körülírt és beírt körrel egyaránt bíró sokszöget bicentrikusnak (két középpontúnak) szokás mondani. Az ilyenekben – a háromszögben ismert *Euler-féle reláció*hoz hasonlóan – ismeretes néhány összefüggés az r és ϱ sugarak és a középpontok d távolsága között (esetünkben $2d = KD - KA$):

3-szögben $d^2 = r^2 - 2r\varrho$;

4-szögben $2\varrho^2(r^2 + d^2) = (r^2 - d^2)^2$;

5-szögben $\varrho(r - d) = (r + d)\left(\sqrt{(r-\varrho)^2 - d^2} + \sqrt{2r(r - \varrho - d)}\right)$;

6-szögben $3(r^2 - d^2)^4 = 4\varrho^2(r^2 + d^2)(r^2 - d^2)^2 + 16r^2\varrho^4d^2$.