Megjegyzések a 2005. évi Eötvös-verseny 2. és 3. feladatának megoldásához [1]

A 2. feladat a Huygens–Fresnel-elv és némi (vektor)algebrai ismeret felhasználásával is megoldható. Tekintsük az ernyő valamely $\boldsymbol{R} = (X, Y, S)$ vektorral jellemzett pontját ($S = 3$ m a rács és az ernyő távolsága), valamint a lézerfénnyel megvilágított lap $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$ és $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ vektorokkal megadott rácspontjait. Annak feltétele, hogy az $\boldsymbol{r}_0$ és az $\boldsymbol{r}$ rácspontokból kiinduló fény az $\boldsymbol{R}$ pontban erősítse egymást:

$$|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_0| - |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + S^2} - \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + S^2} = n\lambda,$$

ahol n egész szám. Kihasználva, hogy $S \gg X, Y \gg x, y$, a fenti két négyzetgyök különbsége így is írható:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + S^2} - \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + S^2} =$$

$$= S\left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{S^2}\right)^{1/2} - S\left(1 + \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{S^2}\right)^{1/2} \approx \frac{xX + yY}{S} = n\lambda.$$

Legyen például $x = d$ és $y = 0$, vagyis tekintsük a rács önkényesen kiválasztott origójától jobbra elhelyezkedő, $\boldsymbol{a} = (d, 0, 0)$ vektorral megadott lyukból induló fényt. Az erősítés feltétele a fenti közelítésben:

$$d \cdot X = n_1 \lambda S,$$

ahol n_1 egész szám. Hasonlóan felírhatjuk egy másik, a háromszögrács origójától „jobbra fölfelé” elhelyezkedő, $\boldsymbol{b} = \left(\frac{d}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}d, 0\right)$ vektorral megadott lyukra az erősítő interferencia feltételét:

$$\frac{d}{2} \cdot X + \frac{\sqrt{3}}{2} d \cdot Y = n_2 \lambda S,$$

ahol n_2 ugyancsak egész szám.

Ha a fenti két feltétel teljesül, akkor nem csak a vizsgált két lyukpárra, hanem pl. a $2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{b}$, sőt, a háromszögrács tetszőleges $N_1\boldsymbol{a} + N_2\boldsymbol{b}$ vektorral megadható pontjából induló elemi hullámra is igaz lesz erősítés feltétele, amennyiben N_1 és N_2 egészek.

A fenti egyenletekből álló rendszer megoldása:

$$X = n_1 \cdot \frac{S\lambda}{d}, \qquad Y = -n_1 \cdot \frac{S\lambda}{\sqrt{3}d} + n_2 \cdot \frac{2S\lambda}{\sqrt{3}d},$$

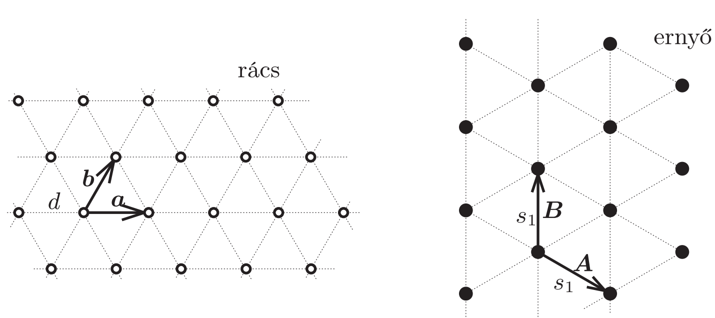
amit vektor alakban így is felírhatunk:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = n_1 \cdot \frac{S\lambda}{d} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + n_2 \cdot \frac{S\lambda}{d} \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = n_1 \cdot \boldsymbol{A} + n_2 \cdot \boldsymbol{B}.$$

Az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ vektorok egymással 120°-os szöget zárnak be, nagyságuk ugyanakkora:

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = s_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} S \frac{\lambda}{d},$$

a belőlük egész együtthatós „lineáris kombinációval” adódó pontrács tehát egy szabályos háromszögrács (*1. ábra*).



1. ábra

[1] A feladatok szövegét és a hivatalos megoldást lásd *Radnai Gyula* cikkében lapunk 168. oldalán.

2. A feladat egy egyszerű geometriai módszerrel is megoldható. Tekintsünk először egy D rácsállandójú négyzetrácsban elhelyező lyukrendszer elhajlási képét. Ez az eset lényegében az optikai ráccsal egyenértékű: a rácsnégyzet mindkét oldalának megfelelő irányban

$$\alpha_k \approx \sin\alpha_k = k\frac{\lambda}{D}$$

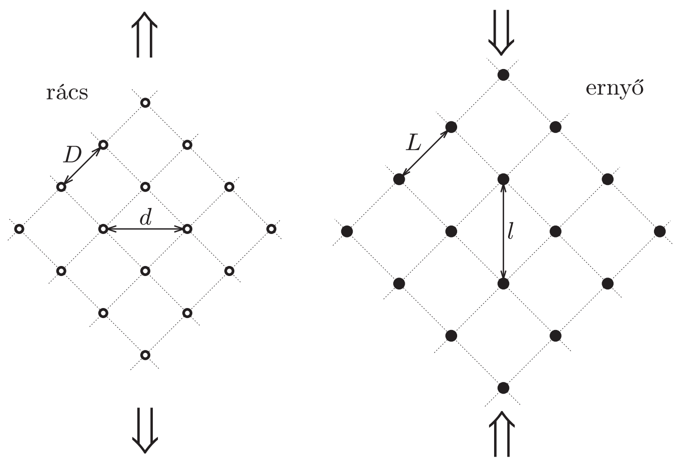
szögben terülhet el a lézerfény, az S távol levő ernyőn tehát egy $s = \dfrac{S\lambda}{D}$ rácsállandójú, az eredeti lyukelrendezéssel megegyező állású négyzetrács alakul ki.

Nyújtsuk meg képzeletben a lyukrendszert síkjának valamelyik iránya mentén az eredeti méretének c-szeresére. Könnyen végiggondolható, hogy ilyenkor az ernyőn az elhajlási kép is ugyanilyen irányban, de ellentétes módon deformálódik: az eredeti méretének c-ed részére zsugorodik. (Ha valamilyen irányban c-szer ritkábban helyezkednek el a lyukak, akkor a megfelelő útkülönbség c-szer kisebb elhajlási szög mellett alakulhat csak ki, és ez az ernyőn a megfelelő irányban c-szeres zsugorításnak felel meg.)

A *2. ábra* bal oldali fele egy olyan négyzetrácsot mutat, amelyben a lyukak legkisebb távolsága (a rácsállandó)

$$D = d/\sqrt{2},$$

és a négyzetek egyik (d hosszúságú) átlója „vízszintesen” helyezkedik el.



2. ábra

Ennek megfelelően az elhajlási kép (az ábra jobb oldai fele) egy olyan – a szokásos elhelyezéshez képest ugyancsak 45°-ban elforgatott – négyzetrács lesz, amelynek rácsállandója $\dfrac{S\lambda}{D}$, a négyzetek átlója tehát

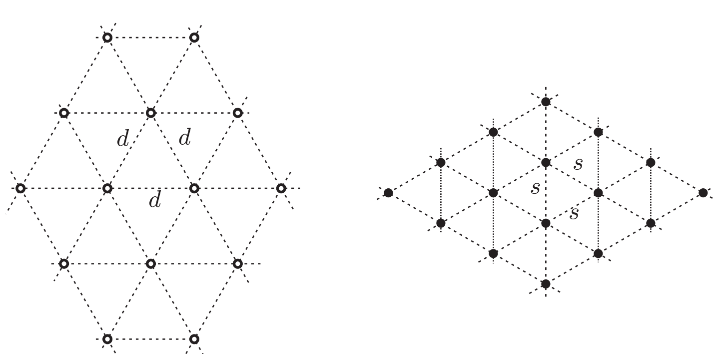
$$l = \sqrt{2}L = \sqrt{2}\frac{S\lambda}{D} = 2\frac{S\lambda}{d}$$

hosszúságú.

Nyújtsuk meg most a rácsot az ábrán megjelölt „függőleges” irányban $\sqrt{3}$-szorosára! Ekkor éppen a feladatunkban szereplő d rácsállandójú rácsot kapjuk (*3. ábra* bal oldala). Az ernyőn az elhajlási kép ugyancsak „függőlegesen” $\sqrt{3}$-ad részére összezsugorodik (lásd a 3. ábra jobb felét), és így

$$s = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{S\lambda}{d} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

rácsállandójú, az eredeti lyukrácshoz képest 90°-kal elforgatott szabályos háromszögráccsá válik.



3. ábra

Az itt alkalmazott transzformációt (amely egyenest egyenesbe visz át, egy-egy egyenes mentén aránytartó, de nem szögtartó) a matematikában *affin-transzformációnak* nevezik.

A 3. feladat energetikai megfontolásokkal is megoldható. Ehhez először belátjuk, hogy a transzformátor tekercsein átfolyó áramok, a tekercseken eső feszültségek és a hálózati feszültség mind azonos fázisban rezegnek. Ez valóban igaz, hiszen a szekunder tekercset egy ohmos ellenállással zártuk, így a rajta átfolyó áram és a feszültsége között nincs fáziskülönbség. A primer és a szekunder feszültség is azonos fázisban változik (hiszen csak így lehet az arányuk minden pillanatban a menetszámoknak megfelelő 1 : 3), és ugyanez igaz (terhelt transzformátornál) a primer- és a szekunderköri áramokra is. A primer körben tehát a tekercs feszültsége és az ohmos ellenálláson eső feszültség között nincs fáziskülönbség, és mivel az összegük minden pillanatban a hálózati feszültség, azzal is azonos fázisban kell legyenek.

Ha I_p-vel jelöljük a primer, I_sz-szel pedig a szekunder kör effektív áramerősségét, akkor (a 16. ábra jelöléseit követve) felírhatjuk, hogy a hálózat által leadott teljesítmény megegyezik a két kör ellenállásai által felvett teljesítménnyel:

$$UI_\mathrm{p} = I_\mathrm{p}^2\,\frac{R}{4} + I_\mathrm{sz}^2\,R.$$

Másrészt igaz, hogy az adott menetszám-arányú, jó minőségű, terhelt transzformátornál $U_3 = 3U_2$ és $U_2 \cdot I_\mathrm{p} = U_3 \cdot I_\mathrm{sz}$, azaz

$$I_\mathrm{sz} = \frac{1}{3}\,I_\mathrm{p}.$$

A fenti egyenletekből a szekunder kör áramára

$$I_\mathrm{sz} = \frac{12}{13}\,\frac{U}{R},$$

a primer körben egy-egy izzó áramerősségére pedig

$$\frac{1}{3}\,I_\mathrm{p} = \frac{9}{13}\,\frac{U}{R}$$

adódik, amelyből a megoldásban közölt eredményekhez és következtetésekhez juthatunk, vagyis valamennyi izzó tűrhetően kell világítson.