I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*
a) $(4-x^2)\sqrt{1-x}=0$;
b) $(0{,}4^x-2{,}5^{x+1}-1{,}5)\cdot\log_3(x+3)=0$;
c) $\sin x=5\cos\dfrac{x}{2}$.

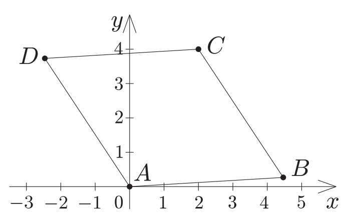
Megoldás. *a)* A négyzetgyök miatt $1-x\ge 0$, azaz $x\le 1$. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0:
ha $4-x^2=0$, akkor $|x|=2$, de az értelmezési tartomány miatt x nem lehet 2;
ha $\sqrt{1-x}=0$, akkor $x=1$.
Tehát $x=1$ vagy $x=-2$, és mindkettő megoldás.
b) A logaritmus miatt $x+3>0$, azaz $x>-3$. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0:
Ha $0{,}4^x-2{,}5^{x+1}-1{,}5=0$, akkor

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x-\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1}-\frac{3}{2}=0,\qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x-\frac{5}{2}=0.$$

Ezt az egyenletet másodfokúként megoldjuk: $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x_1}=\dfrac{5}{2}$, amiből $x_1=-1$, vagy $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x_2}=-1$, ami nem lehetséges.
Ha $\log_3(x+3)=0$, akkor $x=-2$ adódik.
Innen $x=-1$; $x=-2$, amelyek megoldások.
c) A $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ miatt rendezés után vagy $\cos\dfrac{x}{2}=0$, innen $x=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; vagy $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{2}$, ami lehetetlen.

2. *Az $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsa $A(0;0)$, $C(2;4)$. Az A és C csúcsoknál lévő szög $120°$. Határozzuk meg a B és D csúcs koordinátáit.*

Megoldás. Az átlók szögfelezők is a rombuszban, ezért ABC, illetve ACD szabályos háromszögek, oldalaik $\sqrt{20}$ egység hosszúak. A hiányzó csúcsok az A középpontú $\sqrt{20}$ sugarú, és a C középpontú $\sqrt{20}$ sugarú körök metszéspontjai, vagyis az $x^2+y^2=20$ és az $(x-2)^2+(y-4)^2=20$ egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk.



A keresett pontok: $B\big(1+2\sqrt{3};2-\sqrt{3}\big)$, $D\big(1-2\sqrt{3};2+\sqrt{3}\big)$.

3. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\left.\begin{aligned} x^3-x^2y-4xy^2+4y^3&=0\\ 2x^2+y^2&=12\end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Az első egyenlet szorzattá alakítható:

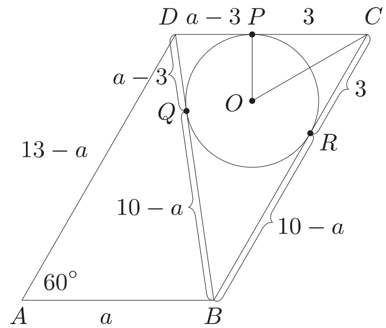
$$x^3-x^2y-4xy^2+4y^3=x^2(x-y)-4y^2(x-y)=(x-y)(x-2y)(x+2y).$$

Három esetet kapunk: $x=y$ vagy $x=2y$ vagy $x=-2y$.
Rendre behelyettesítve a második egyenletbe a következő megoldáspárok adódnak:

$$(2;2),\ (-2;-2),\ \left(\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(\frac{4\sqrt{3}}{3};-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

4. *Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 26 egység, $AB<AD$, a BCD háromszögbe írható kör sugara $\sqrt{3}$ egység, a paralelogramma B csúcsnál lévő szöge $120°$. Mekkorák a paralelogramma oldalai?*

Megoldás. Legyenek P, Q, R az érintési pontok, O a kör középpontja, $AB=a$. Az OPC háromszög derékszögű, $POC=60°$, ezért $PC=3$. Tudjuk, hogy $DC+CB=13$ (a kerület fele).



Külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők: $RC = PC = 3$, $DP = DQ = a - 3$, $BR = BQ = 10 - a$. Ezért $DB = 7$.

Az ABD háromszögre írjuk fel a koszinusztételt:

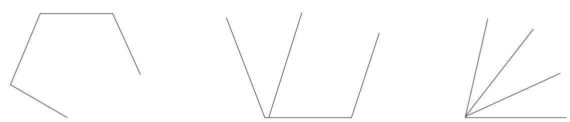
$$49 = a^2 + (13 - a)^2 - 2a(13 - a)\cos 60°.$$

Innen $a = 8$, illetve $a = 5$. Mivel $AB < AD$, azért $AB = CD = 5$, $BC = CD = 8$.

II. rész

5. *Adott öt pont úgy, hogy nincs közöttük három egy egyenesen. Négy egyenes szakaszból álló hálózattal szeretnénk összekötni őket, a keresztezés megengedett. Hány ilyen hálózat képzelhető el?*

Megoldás. Háromféle típusú hálózat van:



1. 2. 3.

Az első típusúból $\frac{5!}{2} = 60$ darab van, mert a kiinduló pont bármelyik lehet az öt közül, a következő eggyel kevesebb stb., és mindegy, hogy melyik a kezdő és melyik a végső pont.

A második típusúból szintén 60-féle lehet, mert a hármas elágazás 5 helyen lehet, a kettes elágazás 4 helyen, az ehhez éllel csatlakozó csúcs pedig 3-féle, ezután a másik két csúcs már egyértelmű.

A harmadik típusú 5-féle lehet, mert bármelyik pont lehet az elágazás központja.

Összesen 125 eset lehetséges.

6. *Igazoljuk, hogy minden háromszögben*

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1,$$

ahol α, β, γ a háromszög szögei.

Megoldás. Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, azért $\frac{\gamma}{2} = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\left(90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} +$$

$$+ \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 =$$

$$= \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right) = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1.$$

7. *Egy hosszú pálcán egy bolha ugrál. Minden ugrása véletlenszerűen balra vagy jobbra történik, ugrásainak hossza* 10 *cm.*

a) *Hányféle módon juthat el* 10 *ugrással a kiindulási helytől* 40 *cm távolságra jobbra, illetve* 50 *cm távolságra balra?*

b) *Határozzuk meg, hogy* 10 *ugrás után mekkora valószínűséggel tartózkodik a bolha a pálca egyes pontjaiban.*

Megoldás. *a)* Ha x-et ugrik egyik irányba, akkor $(10-2x)\cdot 10=(5-x)\cdot 20$ cm-re jut a kiindulási helyétől. Ez csak 20-szal osztható távolság lehet, 50 cm-re tehát nem távolodhat el a kiindulási helyzetből.

40 cm távolságra eljuthat: $(5-x)\cdot 20=40$, amiből $x=3$. Tehát 3 ugrása lesz balra és $10-3=7$ jobbra. Ezt $\binom{10}{3}=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}=120$-féle módon teheti meg.

b) A bolha a 10 ugrást 2^{10}-féleképpen teheti meg, és a pálcán a kiindulási helytől jobbra vagy balra maximum $10a$ távolságra juthat el, ahol $a\le 10$ páros szám.

$10a$ cm-re úgy kerülhet, hogy b számú ugrást tesz balra és $(10-b)$ számú ugrást tesz jobbra. Ekkor $a=b-(10-b)$, innen $b=\dfrac{a}{2}+5$. Tehát $\binom{10}{b}=\binom{10}{\frac{a}{2}+5}$-féleképpen teheti meg az ugrásokat. A valószínűség pedig:

$$\frac{\binom{10}{\frac{a}{2}+5}}{2^{10}}.$$

8. *Az* $f(x)=(p+1)x^2-(p+3)x+2p$ *hozzárendeléssel megadott függvényben* p *valós paraméter. Határozzuk meg a* p *értékét úgy, hogy a függvény minden valós* x *esetén pozitív értéket vegyen fel.*

Megoldás. Ha $p=-1$, akkor ez egy elsőfokú nem állandó függvény, ekkor nem teljesül a feltétel.

Ha $p\ne -1$, akkor f másodfokú függvény, amely akkor lesz minden valós x esetén pozitív, ha $p+1>0$ és a diszkriminánsa negatív, azaz:

$$D=(p+3)^2-8p(p+1)=-7p^2-2p+9<0.$$

Ez $p<-\dfrac{9}{7}$ vagy $p>1$ esetén lenne, de $p>-1$-nek is teljesülnie kell.

Így akkor vesz fel minden valós x esetén pozitív értéket az $f(x)$ függvény, ha $p>1$.

9. *Határozzuk meg azokat az* $(x;y)$ *számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:*

a) $\sin^2(x+y)-\cos^2(x-y)=1$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=2y^2-4y+3$.

Megoldás. *a)* Mivel $\sin^2(x+y)=1-\cos^2(x+y)$, azért az egyenlet a következő alakban is írható: $\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)=0$. Két szám négyzetének összege csak úgy lehet 0, ha mindkettő 0. Ha $\cos^2(x+y)=0$, akkor $x+y=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$; ha $\cos^2(x-y)=0$, akkor $x-y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. Ezekből: $x=\dfrac{\pi}{2}+(n+k)\dfrac{\pi}{2}$ és $y=(n-k)\dfrac{\pi}{2}$, ahol $n,k\in\mathbb{Z}$.

b) Alakítsuk a két oldalt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1,\qquad 2y^2-4y+3=2(y-1)^2+1\ge 1.$$

Egyenlőség csak akkor lehet, ha $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ és $2y^2-4y+3=1$.

Így $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ és $y=1$. Ezek valóban kielégítik az egyenletet.