Több, mint kétezer évvel ezelőtt a régi görögök arányokra alapozva már használták a *számtani*, a *mértani* és a *harmonikus közép* fogalmát. Legyen x és y pozitív szám, a számtani közepük:

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2},$$

a mértani közepük:

$$G(x,y) := \sqrt{xy}$$

és harmonikus közepük:

$$H(x,y) := \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}\,.$$

Mind a három mennyiség x és y közé esik, ez indokolja a *közép* elnevezést. Ha $x < m < y$, akkor a számtani közepet az

$$y - m = m - x,$$

a mértani közepet az

$$\frac{m}{x} = \frac{y}{m} \quad \text{vagy} \quad \frac{y-m}{m-x} = \sqrt{\frac{y}{x}},$$

végül a harmonikus közepet a kicsit bonyolultabb

$$y = m + \frac{y}{n} \quad \text{és} \quad m = x + \frac{x}{n}$$

tulajdonságok jellemzik. Ha ebből az egyenletrendszerből n-et kiküszöböljük, akkor egy egyszerűbb alakot kapunk:

$$\frac{y-m}{m-x} = \frac{y}{x}.$$

A régi görögök a kocka geometriai harmóniáját látták abban a tényben, hogy az élek számának és a lapok számának harmonikus közepe éppen a csúcsok száma.

Az x, $A(x,y)$, $H(x,y)$ és y számok arányai közötti

$$x : A(x,y) = H(x,y) : y$$

összefüggést már a babiloniaiak is ismerték, de feledésbe ment, *Pitagorasz* újra felfedezte. Az említett közepeket egyébként pitagoraszi közepeknek is szokták nevezni.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségre egy algebrai és egy geometriai bizonyítást adunk. A

(1) $$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

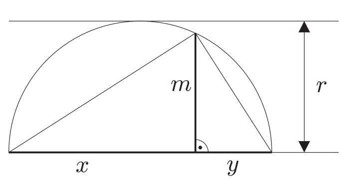
$$4xy \le (x+y)^2$$

egyenlőtlenséggel, ami nem más, mint

$$0 \le (x-y)^2.$$

Ez mindig igaz, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y$. Ezzel az (1) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk, sőt szükséges és elégséges feltételt is kaptunk az egyenlőségre.

A geometriai bizonyítás a derékszögű háromszögre vonatkozó magasságtételen alapszik.



A magasságtétel szerint $m = \sqrt{xy}$, ahol x és y az átfogó szeletei. A háromszög köré írt kör r sugara x és y számtani közepe. Az ábrából *látszik, hogy $m \le r$, és ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség*

A harmonikus és a mértani közép közötti

$$H(x,y) \leq G(x,y)$$

egyenlőtlenség egyszerű számolással visszavezethető a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségre.

Most az (1) egyenlőtlenség többváltozós alakját kívánjuk igazolni. Legyenek x_1, x_2, x_3 és x_4 pozitív számok. Az (1) egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sqrt{(x_1x_2)}\sqrt{(x_3x_4)} \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right).$$

A jobb oldalon álló szorzatra megint alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leq \left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)^2.$$

A két egyenlőtlenséget összevetve és négyzetgyököt vonva az adódik, hogy

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

Ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség négyváltozós alakja. Ugyanezt az eljárást ismételve juthatunk el az

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \tag{2}$$

egyenlőtlenséghez, ahol $n = 2^k$. Ha az x_i-k között v darab x és $n-v$ darab y van, akkor egyenlőtlenségünk az

$$\sqrt[n]{x^v y^{n-v}} = x^{\frac{v}{n}} y^{\frac{n-v}{n}} \leq \frac{vx+(n-v)y}{n} = \frac{v}{n}x + \frac{n-v}{n}y$$

formát ölti. Ez áttekinthetőbb, ha $\frac{v}{n}$ helyébe α-t írunk:

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y. \tag{3}$$

Így a súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenséghez jutottunk, ami $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén adja vissza (1)-t. Bizonyításunkban α nem lehet egyelőre tetszőleges $(0;1)$-beli szám, csupán $\frac{v}{2^k}$ alakú. (Az ilyen számokat néha *diadikus racionálisaknak* nevezik.) $\frac{v}{2^k}$ alakú számokkal bármilyen $\alpha \in (0,1)$ közelíthető, ezért a (3) egyenlőtlenség minden 0 és 1 közé eső α-ra igaz.

A gondolatmenetet egy kicsit továbbfejlesztve eljuthatunk az

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m \tag{4}$$

egyenlőtlenséghez, ami akkor igaz, ha az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ pozitív számokra $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m = 1$ teljesül. (4) a *súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenség* általános alakja.

A súlyozott számtani közép előfordul például a következő helyzetben: Tegyük fel, hogy egy diáknak van két darab 5-ös dolgozata és egy 1-es és egy 2-es felelete. Úgy akarjuk kiszámítani az átlagát, hogy a dolgozatai kétszer olyan súllyal számítanak, mint a feleletei. Ekkor az átlag:

$$\frac{(5+5)+(5+5)+1+2}{6} = \frac{2}{6}\cdot 5 + \frac{2}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 = 3{,}8\dot{3}.$$

Ha az egyszerű átlagot számoljuk, akkor $3,25$ kerekítve 3-as. De ha figyelembe vesszük a dolgozatok nagyobb súlyát, akkor a diák a 4-est is megérdemli.

A logaritmikus közép

Az x és y pozitív számok *logaritmikus közepe:*

$$L(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y}, & \text{ha } x \neq y, \\ x, & \text{ha } x = y. \end{cases} \tag{5}$$

Ez a képlet jóval bonyolultabb, mint a számtani, vagy a mértani közép. Az sem látszik azonnal, hogy $L(x,y)$ egy pozitív szám, még kevésbé az, hogy x és y közé esik. Mindezek a tulajdonságok igazak és következnek az alábbi tételből.

1. tétel.

$$G(x,y) \le L(x,y) \le A(x,y)$$

minden pozitív x és y számra.

Bizonyítás. Osszuk el a

$$\sqrt{xy} \le \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \le \frac{x+y}{2}$$

igazolandó egyenlőtlenséget y-nal, így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \le \frac{\frac{x}{y}-1}{\ln\frac{x}{y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+1\right).$$

Látjuk, hogy mindenütt x-nek és y-nak a hányadosa szerepel, ezért érdemes ennek helyébe egy új változót írni, mondjuk z^2-et:

$$z \le \frac{z^2-1}{2\ln z} \le \frac{1}{2}(z^2+1).$$

Tehát a következő két egyenlőtlenséget kell igazolnunk:

$$2z \le \frac{z^2-1}{\ln z} \tag{6}$$

és

$$\frac{z^2-1}{\ln z} \le z^2+1. \tag{7}$$

Az egyszerűség kedvéért mindkét egyenlőtlenséget a $z > 1$ esetben igazoljuk (ekkor $\ln z > 0$), a $0 < z < 1$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható. Így (7) a

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} \le \ln z$$

alakot ölti. $z = 1$ esetén mindkét oldal 0. Az egyenlőtlenség biztosan fennáll, ha a bal oldal lassabban növekszik, mint a jobb, vagyis a bal oldal deriváltja kisebb, mint a jobb oldalé. Elvégezzük a deriválást. Meg kell mutatnunk, hogy

$$\frac{2z(z^2+1)-(z^2-1)2z}{(z^2+1)^2} \le \frac{1}{z},$$

amit átrendezve

$$0 \le z^4 - 2z^2 + 1 = (z^2-1)^2$$

adódik. Természetesen ez igaz, így (7) bizonyítását elvégeztük.

A (6) egyenlőtlenséget a

$$2\ln z \le \frac{z^2-1}{z} \tag{8}$$

formára hozzuk. $z = 1$ esetén mindkét oldal 0. Hasonlóan, mint az előző esetben, megmutatjuk, hogy a bal oldal deriváltja kisebb, mint a jobb oldalé. Most a következő egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk:

$$\frac{2}{z} \le \frac{2z\cdot z - (z^2-1)\cdot 1}{z^2},$$

ami átrendezés után

$$2 \le z + \frac{1}{z},$$

és tovább alakítva

$$0 \le (z-1)^2.$$

Ez nyilvánvaló, és ezzel a (6) egyenlőtlenség bizonyítását befejeztük.

Ha tudunk integrálni, akkor az

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha)y$$

egyenlőtlenségeket integrálva α szerint 0-tól 1-ig, éppen az $L(x,y) \le A(x,y)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből azt is megjegyezhetjük, hogy a logaritmikus közép a súlyozott mértani közepeknek a súlyok szerint vett integrálja. (A számtani közép pedig a súlyozott számtani közepek hasonló integrálja.)

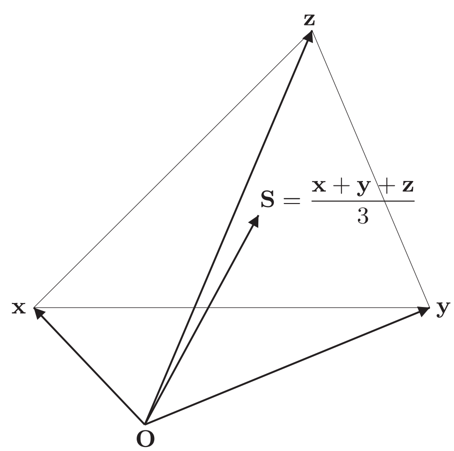
Vektorok számtani közepe

Legyenek $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ a sík vektorai. Számtani közepük

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{n}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n).$$

Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk az $n = 3$ esettel. Ekkor a három vektort inkább az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ betűkkel jelöljük. Ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ és $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, akkor

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \left(\frac{1}{3}(x_1 + y_1 + z_1), \frac{1}{3}(x_2 + y_2 + z_2)\right).$$



Az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *és* $\mathbf{z}$ *vektorok számtani közepe nem más, mint a három pont által meghatározott háromszög* súlypontjába *mutató vektor. A számtani középnek tehát egyszerű geometriai jelentése van*

2. tétel. *Legyen* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *és* $\mathbf{z}$ *három vektor a síkon. Ekkor a sík helyvektorain értelmezett*

$$\mathbf{w} \mapsto |\mathbf{w} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^2$$

függvény minimumhelye a három vektor számtani közepe. (Itt az abszolútértékjel a vektorok hosszát jelöli.)

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{m}$ az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok számtani közepét,

$$\mathbf{m} := \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}}{3}.$$

A következő azonosság maga a bizonyítás:

$$|\mathbf{w} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^2 =$$

$$= 3|\mathbf{w} - \mathbf{m}|^2 + |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 - \frac{1}{3}|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}|^2.$$

Tételezzük fel, hogy van egy gépünk, ami két vektornak megadja a számtani közepét. Lehetne-e ezt a gépet három vektor számtani közepének meghatározására használni? Közvetlen módon talán nem, de építhetnénk belőle egy új berendezést, amely három bemenő vektorból három kimenő vektort ad meg. Ha $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ a bemenő vektorok, akkor a kimenők

$$\mathbf{x}' := \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z}), \qquad \mathbf{y}' := \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{x}), \qquad \mathbf{z}' := \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Új berendezésünk azt a gépet használja, amely két vektornak képes megadni a számtani közepét. Ezt a berendezést használjuk ismételten, az általa kiadott vektorokat tápláljuk be újra és újra. Így a következő rekurziót végeztetjük.

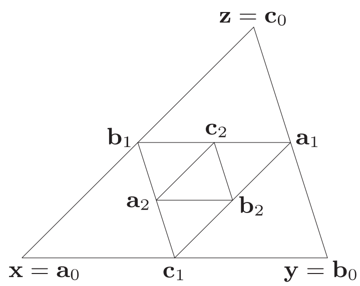
Legyen az $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0)$ vektorhármas a kiindulási $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ hármas. Ha az $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ hármas már megvan, akkor a berendezésnek beadva, az kiadja az $(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{c}_{n+1})$ hármast, az

$$\mathbf{a}_{n+1} := \frac{1}{2}(\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n), \quad \mathbf{b}_{n+1} := \frac{1}{2}(\mathbf{c}_n + \mathbf{a}_n), \quad \mathbf{c}_{n+1} := \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$$

képletek szerint. Amint n növekszik, az $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ vektorhármasok egyre kisebb Δ_n háromszögeket határoznak meg, és egyre jobban megközelítik a kezdetben adott három vektor számtani közepét, amely Δ_0 súlypontja. Valójában a $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ háromszögek súlypontjai egybeesnek, hiszen a rekurzióból adódóan

$$\frac{1}{3}(\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1} + \mathbf{c}_{n+1}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}_n + \mathbf{a}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n).$$



A rekurzióval értelmezett $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ vektorhármasok által meghatározott háromszögek egyre kisebbek, és megközelítik az $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ és $\mathbf{c}_0$ vektorok számtani közepét, a súlypontot

Befejezésül megemlítjük, hogy ha az

$$a_{n+1} := M(b_n, c_n), \quad b_{n+1} := M(c_n, a_n), \quad c_{n+1} := M(a_n, b_n)$$

rekurziót egy a_1, b_1, c_1 számhármasból indítjuk M helyében a geometriai középpel, akkor a határérték az adott számhármas geometriai közepe (hasonlóan a fent részletezett számtani közép esetéhez). Ha M helyébe a logaritmikus közepet tesszük, akkor a_n, b_n és c_n közös határétéke létezik, és méltán nevezhetjük a három szám logaritmikus közepének.