Két szám utolsó n jegye akkor és csak akkor egyezik meg, ha különbségük osztható 10^n-nel. Így azt kell bizonyítanunk, hogy $a_{n+1}-a_n$ osztható 10^n-nel. Az

$$a_{k+1}-a_k=a_k^2-a_{k-1}^2=(a_k+a_{k-1})(a_k-a_{k-1})$$

összefüggést $k=n$, $n-1$, $\ldots$, 3, 2-re felírva kapjuk, hogy

$$a_{n+1}-a_n=(a_n+a_{n-1})\cdot\ldots\cdot(a_3+a_2)\cdot(a_2+a_1)\cdot(a_2-a_1). \tag{1}$$

a_i mindegyike 5-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa, ezért 5-re végződik. Így (1) jobb oldalán mindegyik tényező 0-ra végződik, azaz osztható 10-zel. S mivel a tényezők száma n, a szorzatuk osztható 10^n-nel, amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés. $n\geqq 3$-ra a_n és a_{n+1} utolsó $n+1$ jegye is megegyezik, hiszen (1) utolsó 3 tényezőjének szorzata nemcsak 10^3-nal, hanem 10^4-nel is osztható. Másrészt a_n és a_{n+1} utolsó $n+2$ jegye semmilyen n-re sem egyezhet meg, hiszen 2^{n+2} nem osztója $(a_{n+1}-a_n)$-nek.

Hidas Pál (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)