A múlt havi számunkban közreadtuk a 2005. évi Őszi Ankét totó-kérdéseit. A helyes válasz:

$$1, \mathrm{X}, 2, \quad 2, 1, 1, \quad 1, \mathrm{X}, \mathrm{X}, \quad 2, 1, 1, \quad \mathrm{X}, \mathrm{X}.$$

A legjobb eredményt, 13 találatot *Nagy Zoltán* (Szolnok, Varga Katalin Gimn., 12. o.t.) érte el; könyvjutalmat kapott.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a totóban szereplő feladatok megoldásához.

1. *Egy pozitív egészekből álló sorozatot* kiegyensúlyozottnak *nevezünk, ha van olyan $k \geq 1$, hogy a sorozat első k eleme a megadott sorrendben megegyezik a sorozat utolsó k elemével. Legyen e a legrövidebb olyan sorozat, amelyik kiegyensúlyozott lesz, akár az 1, akár a 2, akár a 3, akár a 4, akár pedig az 5 számjegyet írjuk a végére. Ekkor a legrövidebb ilyen e sorozat hossza* 31 (1); 41 (2); nincs ilyen sorozat (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). Ha X olyan számsorozat, amely után az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok bármelyikét írva kiegyensúlyozott sorozatokat kapunk, akkor tetszőleges y esetén az XyX sorozatnak is meglesz ugyanez a tulajdonsága, ráadásul az y-t a végére írva is kiegyensúlyozott marad. (A hossza pedig 1-gyel több, mint az X hosszának kétszerese.) Ebből következik, hogy az egyetlen 1-esből álló sorozatból kiindulva, a konstrukciót négyszer egymás után alkalmazva ($y = 2, 3, 4, 5$-re) egy 31 hosszú, megfelelő tulajdonságú sorozatot kapunk. Tehát csak az 1-es válasz lehet helyes. (Lényegesen fáradságosabban mutatható meg, hogy 31-nél rövidebb sorozat valóban nem lehet megfelelő.)

2. *Az Északi-sark közelében egy* 920 kg/m^3 *sűrűségű hatalmas jégkocka úszik a víz felszínén. Hányszor nagyobb munkával lehet a jeget a víz felszíne fölé emelni, mint a víz alá nyomni?* Kb. 10-szer (1); kevesebb, mint 1,2-szer (2); több, mint 100-szor (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). Egy a oldalélű, ϱ_j sűrűségű úszó jégkocka $h = \frac{\varrho_\mathrm{j}}{\varrho_\mathrm{v}} a$ mélyen merül be a ϱ_v sűrűségű vízbe. Ha lassan húzzuk kifelé, az emelőerő egyenesen arányos az elmozdulással, átlagosan tehát $\frac{mg}{2}$-nek vehető. A kiemeléskor végzett munka eszerint:

$$W_1 = \frac{mg}{2} \cdot \frac{\varrho_\mathrm{j}}{\varrho_\mathrm{v}}\, a.$$

A víz alá nyomott kockára ható erő is egyenesen arányos az elmozdulással, legnagyobb értéke a felhajtóerő és a gravitációs erő különbsége: $\varrho_\mathrm{v} g a^3 - mg$, átlagértéke pedig ennek fele. Kihasználva, hogy $mg = \varrho_\mathrm{j} g a^3$, a víz alá nyomáskor végzett munka

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{j}} mg - mg\right)\left(a - \frac{\varrho_\mathrm{j}}{\varrho_\mathrm{v}} a\right) = \frac{mg}{2} \cdot \frac{(\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{j})^2}{\varrho_\mathrm{j}\varrho_\mathrm{v}}\, a.$$

A kétféle munka aránya:

$$\frac{W_1}{W_2} = \left(\frac{\varrho_\mathrm{j}}{\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{j}}\right)^2 = \left(\frac{920}{80}\right)^2 \approx 130.$$

3. *A 10^{21}-nél nem nagyobb prímszámok száma:* 21 127 269 486 616 126 181 (1); 21 127 269 486 018 731 928 (2); 21 127 269 486 017 800 357 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2).

4. *Egy nagy tó felszíne tükörsima. A hőmérséklet fagypont alá süllyedt, és* 1 *nap eltelte után a jégréteg vastagsága* 1 cm *lett. Várhatóan mennyi lesz a jég vastagsága még* 1 *nap múlva, ha közben a levegő hőmérséklete nem változik meg?* 2 cm (1); $\sqrt{2}$ cm (2); 1,5 cm (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). A jég mélyebb rétegeinek fagyását az teszi lehetővé, hogy az éppen megfagyó jégből felszabaduló energia (a fagyáshő) hővezetéssel eljut a jég felszínére, és ott átadódik a környező levegőnek. Bizonyos t idő alatt megfagyó jégréteg $x(t)$ vastagsága a kelvin (K) dimenziójú (ΔT) hőmérsékletkülönbségtől, a jég λ hővezetőképességétől (vagyis az egységnyi hőmérsékletgradiens hatására kialakuló hőáramsűrűségtől, melynek mértékegysége $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\,s\,K}}$), valamint a jég térfogategységre vonatkoztatott fagyáshőjétől (ϱL_0, dimenziója $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$) függhet csupán. Ezekből a mennyiségekből méter dimenzióját csak

$$x(t) \sim \sqrt{\frac{\lambda \Delta T}{\varrho L_0} t}$$

módon kaphatunk. Ezek szerint a jég vastagsága (ha a külső körülmények nem változnak) az idő négyzetgyökével arányosan növekszik.

5. *Egy kávéfőzőből éppen kifőtt a kávé, amikor a kifolyócsövét egy vízzel teli pohárba nyomjuk. Mi történik?* Ismét megtelik vízzel (1); csak egy kevés vizet szív fel (2); nem képes vizet felszívni, hacsak nem döntjük meg szinte a vízszintes helyzetéig (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). A kávéfőző megtöltésekor a víz feletti térrészben levegő található. Amikor fő a kávé, a levegő szinte teljesen eltávozik a készülékből, helyét vízgőz foglalja el. Ha a kifolyócsövet vizespohárba nyomjuk, a lehűlő gőz lecsapódik, a külső légnyomás vizet nyom fel a készülékbe és szinte teljesen megtölti azt. (A kísérletet kellő óvatossággal bárki elvégezheti!)

6. *Ha Békéscsaba és Budapest között egy „nyílegyenes” alagút készülne, és ebben (vákuumban, motor nélkül) mozogna egy kezdősebesség nélkül induló vonat,* hamarabb (1); később (2); kb. ugyanakkor (X) érkezne a célba, mint a szokásos gyorsvonat.

Megoldás. A helyes válasz: (1). A vonatra ható erőnek az alagút tengelyével párhuzamos komponense $F(x) = -mgx/R$ lenne, ahol x az alagút közepétől mért távolság, R pedig a Föld sugara. Eszerint a vonat harmonikus rezgőmozgást végezne az alagútban, menetideje tehát a periódusidő fele:

$$T = \pi\sqrt{R/g} \approx 40 \text{ perc.}$$

Ez lényegesen kevesebb, mint a szokásos gyorsvonat mintegy két és fél órás menetideje.

7. *Egy közönséges* A4*-es fénymásolópapírt félbehajtunk. Amit így kapunk, újból félbehajtjuk és ezt ismételjük, amedig csak lehetséges. Hány félbehajtás tehető meg?* Legfeljebb 7 (1); 8 vagy 9 (2); legalább 10 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2).

8. 12 *darab egyforma kondenzátorból – mint élekből – kockát állítunk össze. A kocka melyik* 2 *csúcsa között mérhetjük a legnagyobb eredő kapacitást?* Egy testátló két végpontja között (1); egy lapátló két végpontja között (2); valamely él két végpontja között (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). Az egyforma R ellenállásokból felépített kocka ismert feladat, ekvipotenciális pontok keresésével, majd soros és párhuzamos eredők számításával megkapható megoldása:

$$R_{\text{testátló}} = \frac{10}{12}R, \qquad R_{\text{lapátló}} = \frac{9}{12}R, \qquad R_{\text{él}} = \frac{7}{12}R.$$

Az eredő ellenállás tehát az élek mentén a legkisebb. Ugyanez igaz a kondenzátoros kapcsolás váltóáramú impedanciáira is. Másrészt a kondenzátor impedanciája a kapacitással fordítottan arányos, az eredő kapacitás tehát az élek mentén *nagyobb* kell legyen, mint a lap-, vagy a testátló mentén.

9. *Legfeljebb mekkora területet láthat be nyílt vízen egy jó szemű tengerész a vízszint felett* 20 m *magasan levő árbockosárból?* 200 km^2 (1); 400 km^2 (2); 800 km^2 (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X) Jelölje a Föld sugarát r, a gömbsüveg sugarát R, magasságát m, az árbockosár vízszint feletti magasságát a, végül x az árbockosárból (mint pontból) a Földhöz húzott érintő hosszát. Ekkor

$$x^2 + r^2 = (r+a)^2, \quad x = \sqrt{a^2 + 2ar};$$

$$xr = (r+a) \cdot R, \quad R = \frac{\sqrt{a^2 + 2ar} \cdot r}{r+a};$$

$$m = \sqrt{x^2 - R^2} - a,$$

amibe R és x fenti értékét behelyettesítve, majd átalakítva:

$$m = a \cdot \frac{a + 2r}{a + r} - a.$$

Elég nagy r esetén ez körülbelül a-val egyenlő. A kérdéses terület tehát:

$$T = 2r\pi a,$$

ami $a = 20$, $r = 6\,356$ km esetén körülbelül 799 km^2.

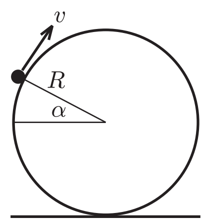
10. *Egy* 25 km/h *sebességgel haladó traktor hátsó kerekének átmérője* 1,8 m. *Az aszfalthoz képest legfeljebb milyen magasra repülhetnek a kerékről leváló sárdarabok?* Kb. 2,5 méterre (1); kb. 3,5 méterre (2); mintegy 4 méterre (X).

Megoldás. A helyes válasz: (2). A ferde hajítás képleteiből megkapható, hogy az *ábrán* látható helyzetben lerepülő sárdarab

$$h(\alpha) = R(1 + \sin\alpha) + \frac{v^2}{2g}(1 - \sin^2\alpha)$$

magasságig emelkedik fel. Ez a kifejezés $\sin\alpha$ másodfokú polinomja, melynek maximuma $\sin\alpha = gR/v^2$-nél található, és az ehhez tartozó emelkedési magasság:

$$h_{\max} = R + \frac{gR^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g} = 3{,}48 \text{ m.}$$



11. *Egy ampermérő ellenállása néhány tized ohm, egy voltmérő ellenállása pedig néhány megaohm. A két műszert egyforma zsebtelepekre kapcsoljuk. Melyik fogyaszt több elektromos energiát ugyanannyi idő alatt?* Az ampermérő (1); a voltmérő (2); kb. egyforma a fogyasztásuk (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). Ha a zsebtelep belső ellenállását r-rel, a műszerekét pedig R_{V}, illetve R_{A} módon jelöljük, akkor az U üresjárati feszültségű telepre kapcsolt műszerek által felvett teljesítmény:

$$P_{\mathrm{V}}=\frac{U^2}{(R_{\mathrm{V}}+r)^2}R_{\mathrm{V}},\qquad P_{\mathrm{A}}=\frac{U^2}{(R_{\mathrm{A}}+r)^2}R_{\mathrm{A}}.$$

Innen

$$\frac{P_{\mathrm{V}}-P_{\mathrm{A}}}{U^2}=\frac{R_{\mathrm{V}}-R_{\mathrm{A}}}{(R_{\mathrm{A}}+r)^2(R_{\mathrm{V}}+r)^2}(r^2-R_{\mathrm{A}}R_{\mathrm{V}}).$$

A jobb oldalon álló tört nyilván pozitív, a zárójelben szereplő kifejezés pedig – a telepek tipikus 10 Ω-os nagyságrendű belső ellenállásának figyelembe vételével – *negatív.* Ezek szerint $P_{\mathrm{A}}>P_{\mathrm{V}}$.

12. *Egy elektron mozgási energiája megegyezik egy foton energiájával. Melyik részecske impulzusa nagyobb?* Az elektroné (1); a fotoné (2); ugyanakkora (X).

Megoldás. A helyes válasz: (1). Ha az elektron mozgása nemrelativisztikus (vagyis a sebessége kicsi a fénysebességhez képest), akkor a megadott feltétel (a szokásos jelöléseket használva)

$$\frac{mv^2}{2}=hf.$$

A két részecske impulzusának aránya ilyenkor:

$$\frac{p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{f}}}=\frac{mv}{\left(\frac{hf}{c}\right)}=\frac{2c}{v}>1.$$

Ugyanerre a következtetésre jutunk, ha a relativisztikus

$$E_{\mathrm{mozg}}=\sqrt{p_{\mathrm{e}}^2c^2+m^2c^4}-mc^2=hf=p_{\mathrm{f}}c$$

képletet használjuk. Ebből ugyanis algebrai átalakítások után

$$p_{\mathrm{e}}^2-p_{\mathrm{f}}^2=2mcp_{\mathrm{f}}>0$$

következik.

13. *Egy parabolát csúszásmentesen gördítünk egy egyenes mentén. Milyen görbét ír le eközben a parabola fókuszpontja?* Hiperbolát (1); parabolát (2); láncgörbét (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). Egy egyenes mentén csúszásmentesen gördülő kúpszeletek fókuszpontjai olyan görbéket írnak le, amelyeknek az egyenes körüli megforgatottjai állandó átlaggörbületű forgásfelületek. Ez *Charles Delaunay* (1812–1872) tétele (lásd a KöMaL 1998. évi februári számát). A parabolának megfelelő forgásfelület átlaggörbülete nulla; éppen ilyen felületet feszít ki a szappanhártya egy – megfelelően elhelyezett köröket tartalmazó – drótkereten. A szappanhártya ún. minimálfelületének vezérgörbéje a koszinusz hiperbolikusz függvény, melyet (mivel a végeinél felfüggesztett lánc alakját is megadja) láncgörbének is neveznek.

13+1. *Egy bizonyos tömegű űrszonda Napba juttatásához kell-e több energia, vagy ahhoz, hogy „elhagyhassa” a Naprendszert?* A Naprendszer elhagyásához (1); a Napba juttatáshoz (2); optimális esetben kb. azonos nagyságú energiával oldható meg mindkét vállalkozás (X).

Megoldás. A helyes válasz: (X). A Naprendszer elhagyásához legalább a harmadik kozmikus sebességre, tehát kb. 42 km/s-ra kell felgyorsítanunk az űrszondát. (Ez csak akkor igaz, ha a gyorsítás egyetlen lépésben, még a Föld közelében történik. Az ún. csúzlihatás, vagyis más égitestekkel történő „lágy” gravitációs ütközés lehetőségének kihasználása csökkentheti a szükséges kezdősebességet.) Ez a sebesség a Naphoz rögzített koordináta-rendszerben értendő, ahonnan nézve a szonda már a fellövés előtt rendelkezik a Föld mintegy 30 km/s-os keringési sebességével; a Földet tehát csak 12 km/s-os sebességgel kell elhagynia.

A Napba zuhanást nem az energia hiánya, hanem a szonda *felesleges perdülete* (impulzusnyomatéka) akadályozza. A szondát csak úgy juttathatjuk a (pontszerűnek tekintett) Napba, ha megszabadítjuk a Nap körüli keringéséből adódó kezdeti perdületétől. Ez történhet pl. úgy, hogy a szonda a Földet (annak keringési sebességével ellentétes irányban) kb. 30 km/s-os sebességgel hagyja el. Ehhez nyilván több energia felhasználására van szüksége, mint a Naprendszer elhagyásához. Megtehetjük azonban azt is, hogy a szondát a Földhöz képest „előrefelé” gyorsítjuk fel *majdnem* 30 km/s-os sebességre. Ennek a gyorsításnak hatására a szonda *majdnem* elhagyja a Naprendszert. A Naptól nagyon messze (mondjuk a Plútó pályája környékén), amikor a szonda sebessége (Kepler II. törvénye értelmében) már nagyon lecsökkent, egy nagyon kicsi fékezéssel a perdületét nullára csökkentjük, majd hagyjuk, hogy a Napba zuhanjon. Így a felhasznált energia kb. ugyanannyi lenne, mint amennyi a Naprendszer elhagyásához szükséges. (Ezen programhoz szükséges *idő* azonban nagyon hosszú, emiatt feltehetően soha nem fogják a gyakorlatban is megvalósítani!)