I. rész

1. *Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós gyöke:*

$$\sqrt{x^2-2005x-2006}+\sqrt{x^2-2007x+2006}+\sqrt{x^2-k^2}=0.$$

(*11 pont*)

Megoldás. Három nemnegatív valós szám összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla. A másodfokú kifejezéseket szorzattá bonthatjuk:

$$\sqrt{(x+1)(x-2006)}+\sqrt{(x-1)(x-2006)}+\sqrt{(x+k)(x-k)}=0.$$

Az első két tag értéke csak akkor nulla egyszerre, ha $x=2006$. Ha van megoldás, akkor a harmadik tagnak is nullának kell lennie 2006 helyettesítésénél:

$$(2006)^2-k^2=(2006+k)(2006-k)=0.$$

Vagyis $k_1=2006$ vagy $k_2=-2006$.

2. *Egy mértani sorozat három egymást követő tagja közül a harmadik -2. Ha ezt az első kettő elé rakjuk, akkor egy számtani sorozat egymást követő három tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot.* (*12 pont*)

Megoldás. A számtani sorozat tagjai: $-2;\ -2+d;\ -2+2d$.
A mértani sorozat tagjai: $-2+d;\ -2+2d;\ -2$.

A mértani sorozatban $(-2+2d)^2=-2(-2+d)$.

Rendezzük ezt az egyenletet: $4-8d+4d^2=4-2d$, $4d^2-6d=0$, $2d(2d-3)=0$. Két értéket kapunk d-re: $d_1=0$ vagy $d_2=1{,}5$. Az eredeti három szám: -2; -2; -2 vagy $-0{,}5$; 1; -2. Mindkét számhármas megfelel a feltételeknek.

3. *Adjuk meg a következő összeget tized pontossággal:*

$$\lg\left(7\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\lg\left(7^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\lg\left(7^3\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\right)+\ldots+\lg\left(7^{999}\cdot\sqrt{\frac{999}{1000}}\right).$$

(*14 pont*)

Megoldás. Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\lg 7+\lg\sqrt{\frac{1}{2}}+\lg 7^2+\lg\sqrt{\frac{2}{3}}+\lg 7^3+\lg\sqrt{\frac{3}{4}}+\ldots+\lg 7^{999}+\lg\sqrt{\frac{999}{1000}}.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$\left(\lg 7+\lg 7^2+\ldots+\lg 7^{999}\right)+\left(\lg\sqrt{\frac{1}{2}}+\lg\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\lg\sqrt{\frac{999}{1000}}\right).$$

Az első zárójeles kifejezést tovább alakítjuk, a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\lg 7+\lg 7^2+\ldots+\lg 7^{999}=1\cdot\lg 7+2\cdot\lg 7+\ldots+999\cdot\lg 7=$$

$$=(1+2+3+\ldots+999)\cdot\lg 7=\frac{999\cdot(999+1)}{2}\cdot\lg 7=499\,500\cdot\lg 7.$$

Most a második zárójelben lévő összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\lg\sqrt{\frac{1}{2}}+\lg\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\lg\sqrt{\frac{999}{1000}}=\lg\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\ldots\sqrt{\frac{999}{1000}}\right)=$$

$$=\lg\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{999}{1000}}=\lg\sqrt{\frac{1}{1000}}=-\frac{3}{2}.$$

A keresett összeg: $499\,500\cdot\lg 7-\dfrac{3}{2}\approx 422\,125{,}0$.

4. *Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja* 56 cm, *a szárai* 53 cm *hosszúak. Tudjuk, hogy az AB alap F felezőpontja, a beírt körének az O középpontja, a köré írt körének a K középpontja, az S súlypontja, az M magasságpontja és a C csúcspontja egy egyenesen vannak.*

a) Hány háromszöget határoznak meg az F, O, K, S, M, C és A pontok?

b) Számítsuk ki az ASK háromszög területét.

c) *Számítsuk ki az FO hosszát.* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel az F, O, K, S, M, C pontok egy egyenesre illeszkednek, azért csak úgy jön létre valódi háromszög, ha egyik csúcsa A, a másik kettő pedig tetszőlegesen választott pontpár a fenti 6 pont közül. A háromszögek száma: $\binom{6}{2}=15$.

b) Az ASK háromszögben az A-ból húzható magasság hossza: $AF=28$ cm. Az SK oldal hossza az FK és FS szakaszok hosszának a különbsége. Az AB alaphoz tartozó magasságot Pitagorasz-tétellel számítva az ACF háromszögből: $28^2+m_c^2=53^2$, ebből $m_c=45$ cm.

A köré írható kör középpontja az alaptól $45-R$ távolságra van. A köré írt kör R sugarát a Pitagorasz-tétellel határozhatjuk meg: $28^2+(45-R)^2=R^2$, ebből $R=\frac{2809}{90}$ cm, vagyis a háromszög körülírt körének középpontja az alap egyenesétől $45-\frac{2809}{90}=\frac{1241}{90}(\approx 13{,}79)$ cm-re van.

A súlypont a súlyvonal alaphoz közelebbi harmadolópontja, tehát a súlypont és az alap egyenesének távolsága $45\cdot\frac{1}{3}=15$ cm.

$$SK=15-\frac{1241}{90}=\frac{109}{90},\quad \text{azaz}\quad T_{ASK}=\frac{28\cdot\frac{109}{90}}{2}=\frac{1526}{90}\ (\approx 16{,}96\ \mathrm{cm}^2).$$

c) A beírt kör középpontja az alaptól r távolságra van. A beírt kör r sugarát a háromszög területének kétféle felírásából határozhatjuk meg: $t=rs=\frac{c\cdot m_c}{2}$, ahol $s=\frac{k}{2}$, és $k=2\cdot 53+56=162$. Ekkor $81r=1260$, ebből $r=\frac{140}{9}$ cm. A beírt kör középpontja az alap egyenesétől $\frac{140}{9}$ $(\approx 15{,}56)$ cm-re van. Ez az FO hossza.

II. rész

5. *Ha a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $f(x)=3|x|$ és $g(x)=x^2$ hozzárendelésű függvények görbéjét az y tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár alakú testet kapunk. Adjuk meg a két pohár térfogatának eltérését deciliterben, ha a koordinátarendszer egysége* 1,5 cm. (*16 pont*)

Megoldás. Az első pohár kúp alakú. Alapkörének sugara: $r=3$, magassága: $m=9$. A térfogata:

$$V_1=\frac{r^2\pi m}{3}=\frac{9\cdot\pi\cdot 9}{3}=27\pi\approx 84{,}82\ \text{térfogategység.}$$

Ha 1 hosszúságegység egyenlő 1,5 cm-rel, akkor a térfogat mérőszámát $1{,}5^3$-nal kell szoroznunk. Az eredmény kerekítve 286,3 cm^3, ami 2,863 dl.

A második pohár is forgástest alakú. Ha az x tengely körül megforgatjuk a $[0;9]$ intervallumon a $h(x)=\sqrt{x}$ függvény görbéjét, akkor is ezt a testet kapjuk. Ennek térfogata:

$$V_2=\pi\int_0^9\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9=\frac{81}{2}\pi\approx 127{,}23\ \text{térfogategység.}$$

A térfogat mérőszámát $1{,}5^3$-nal szorozva, kerekítve 429,4 cm^3-t kapunk, ami 4,294 dl.

A második pohár térfogata közelítőleg 1,431 dl-rel nagyobb, mint az elsőé.

6. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}}=24{,}2.$$

(*16 pont*)

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: csak pozitív számnak van logaritmusa, ezért $x>0$, továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért $x\neq 10^5$, valamint $x\neq 10^{-1}$. Mivel

$$24{,}2=\frac{242}{10}=\frac{121}{5}=\left(\frac{11}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^{-2},$$

azért az eredeti egyenletünk így írható:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^{-2}.$$

Ebből kapjuk: $\dfrac{2}{-5+\lg x}-\dfrac{4}{1+\lg x}=-2.$

Az egyenlet a következő alakra hozható: $\lg^2 x-5\lg x+6=0$, amiből $\lg x_1=2$, $\lg x_2=3$. Innen $x_1=100$, $x_2=1000$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

7. *Adott három kör az egyenletével:*

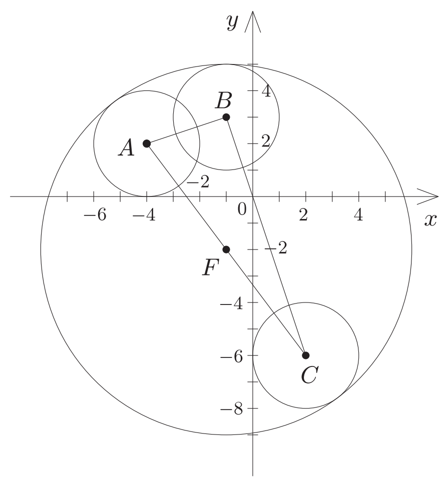
$$x^2+8x+y^2-4y+16=0,$$
$$x^2+2x+y^2-6y+6=0,$$
$$x^2-4x+y^2+12y+36=0.$$

a) Számítsuk ki a középpontjaik által meghatározott háromszög kerületét és területét.
b) Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az adott körök belülről érintenek. (*16 pont*)

Megoldás. A körök egyenletét átírhatjuk a következő alakba:

$$(x+4)^2+(y-2)^2=4,$$
$$(x+1)^2+(y-3)^2=4,$$
$$(x-2)^2+(y+6)^2=4.$$

A három kör középpontja $A(-4;2)$, $B(-1;3)$, $C(2;-6)$.



a) Mivel $AC=10$, $BC=3\sqrt{10}$, $AB=\sqrt{10}$, azért a háromszög kerülete: $k=10+4\sqrt{10}\approx 22{,}65$ (egység).

Ezek a pontok egy derékszögű háromszöget határoznak meg, hiszen $AC^2=AB^2+BC^2$. A háromszög területe: $t=\dfrac{3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2}=15$ (területegység).

b) A keresett kör középpontja az ABC derékszögű háromszög AC átfogójának felezőpontja: $F(-1;-2)$. Mivel a feladatban megadott körök mindegyikének 2 a sugara, azért a keresett kör sugara 2 egységgel nagyobb, mint az ABC háromszög köré írt kör sugara. $FA=5$, tehát a keresett kör sugara 7. A kör egyenlete: $(x+1)^2+(y+2)^2=49$.

8. *András és Béla nagyon sokat asztaliteniszeznek egymással. A tapasztalat azt mutatja, hogy András* 0,7, *Béla* 0,3 *valószínűséggel nyer meg egy játékot. Ha többször játszanak, akkor azt tekintjük győztesnek, aki többször nyert.*

a) Mekkora András nyerési esélye, ha négyszer játszanak?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Béla minden játékot megnyer, ha háromszor játszanak?

c) Hogyan változott András egy játékának nyerési esélye, ha két játék esetén Béla $\dfrac{5}{9}$ *valószínűséggel nem veszít?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) András nyerhetett három vagy négy játékot a négyből, vagyis a nyerési esélye:

$$\binom{4}{3}\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3^1+\binom{4}{4}\cdot 0{,}7^4\cdot 0{,}3^0=0{,}4116+0{,}2401=0{,}6517.$$

b)

$$\binom{3}{0}\cdot 0{,}7^0\cdot 0{,}3^3=0{,}027.$$

c) Ha András p valószínűséggel nyer meg egy játékot, akkor annak a valószínűsége, hogy Béla két játékot lejátszva nem veszít:

$$\binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^2 + \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^1 = \frac{5}{9}.$$

Rendezve: $1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 = \dfrac{5}{9}$, amiből a $p^2 = \dfrac{4}{9}$, azaz $p = \dfrac{2}{3}$ $(p > 0)$.

András nyerési esélye csökkent: 0,7 helyett 0,67 lett.

9. *Igazoljuk, hogy a* $2^n \cdot n! < (n+1)^n$ *egyenlőtlenség minden* 1*-nél nagyobb természetes szám esetén fennáll.* (*16 pont*)

Megoldás. Mindkét oldal pozitív, így vehetjük az n-edik gyöküket:

$$2 \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < n+1, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{n+1}{2}.$$

Mivel

$$\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n} = \frac{1+2+\ldots+n}{n},$$

azért az egyenlőtlenséget így is írhatjuk: $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < \dfrac{1+2+\ldots+n}{n}$. Ez viszont nyilvánvalóan igaz, mert a két oldalon az $1, 2, \ldots, n$ számok mértani, illetve számtani közepe áll.