I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:
a) $(4-x^2)\sqrt{1-x}=0$;
b) $(0{,}4^x-2{,}5^{x+1}-1{,}5)\cdot\log_3(x+3)=0$;
c) $\sin x=5\cos\frac{x}{2}$.

2. Az $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsa $A(0;0)$, $C(2;4)$. Az A és C csúcsoknál lévő szög 120°. Határozzuk meg a B és D csúcs koordinátáit.

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\left.\begin{aligned} x^3-x^2y-4xy^2+4y^3&=0\\ 2x^2+y^2&=12\end{aligned}\right\}$$

4. Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 26 egység, $AB<AD$, a BCD háromszögbe írható kör sugara $\sqrt{3}$ egység, a paralelogramma B csúcsnál lévő szöge 120°. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

II. rész

5. Adott öt pont úgy, hogy nincs közöttük három egy egyenesen. Négy egyenes szakaszból álló hálózattal szeretnénk összekötni őket, a keresztezés megengedett. Hány ilyen hálózat képzelhető el?

6. Igazoljuk, hogy minden háromszögben

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin^2\frac{\gamma}{2}=1,$$

ahol α, β, γ a háromszög szögei.

7. Egy hosszú pálcán egy bolha ugrál. Minden ugrása véletlenszerűen balra vagy jobbra történik, ugrásainak hossza 10 cm.

a) Hányféle módon juthat el 10 ugrással a kiindulási helytől 40 cm távolságra jobbra, illetve 50 cm távolságra balra?

b) Határozzuk meg, hogy 10 ugrás után mekkora valószínűséggel tartózkodik a bolha a pálca egyes pontjaiban.

8. Az $f(x)=(p+1)x^2-(p+3)x+2p$ hozzárendeléssel megadott függvényben p valós paraméter. Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy a függvény minden valós x esetén pozitív értéket vegyen fel.

9. Határozzuk meg azokat az $(x;y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:
a) $\sin^2(x+y)-\cos^2(x-y)=1$;
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=2y^2-4y+3$.