[1]

1. Komplex számok, mint valós elemű mátrixok

A cikk első részében megmutattuk, hogy adott **K** test esetén tetszőleges **K**-beli együtthatós és felette irreducibilis n-edfokú $f(x)$ polinomhoz található olyan $n \times n$-es A mátrix, amely az $f(x)$-nek gyöke. (A skalár együtthatók helyébe a megfelelő skalármátrixokat kell írni!) Az is igaz, hogy A-nak a **K**-beli együtthatós polinomjai testet alkotnak, és e test minden eleme egyértelműen írható fel, mint A-nak legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomja.

A továbbiakban azt az esetet nézzük, amikor a kiinduló test a valós számok **V** teste. Ez a test (amit a számegyenesen szoktunk ábrázolni) a következő jellemző tulajdonságokkal rendelkezik (a szóbanforgó elemek mind **V**-beliek):

(1) Minden a, b elemhez van olyan c, amire $c^2 = a^2 + b^2$.

(2) Ha az a elemhez nincs olyan b, amire $a = b^2$, akkor van olyan c, amire $a = -c^2$.

(3) $a = b^2 = -c^2$ pontosan az $a = 0$ esetben lehet.

(4) Tetszőleges valós együtthatós páratlan fokú (normált) polinomnak van valós gyöke.

(5) Minden valós együtthatós (normált) polinom felbontható legfeljebb másodfokú polinomok szorzatára.

Annak a bizonyítása, hogy a valós számtest rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, felhasználja (4)-nél a folytonosságot. Ezen kívül van még nagyon sok test, ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal. Valójában az (5) tulajdonság következik a többiből, de a „trükkös” bizonyításhoz sok, viszonylag bonyolult algebrai összefüggést kell ismerni. Mindenesetre világos, hogy az a^2 alakú elemek pozitívak, illetve ezeket „tekinthetjük” pozitívnak ($a \neq 0$).

A **V** valós test esetében (5) miatt egy irreducibilis polinom legfeljebb másodfokú. Elsőfokú polinomnak természetesen van gyöke **V**-ben (ez a gyök persze egyértelmű). De van olyan másodfokú polinom, amelynek nincs valós gyöke. Ilyen például az x^2+1, mert ha ennek az a valós szám gyöke lenne, akkor az $a^2 = -1 = -1^2$ összefüggésből (3) szerint $1 = 0$ következne, ami nem igaz.

Az x^2+1 polinom (valamelyik) gyökét i-vel jelölik, és képzetes egységnek nevezik. A másik gyök persze $-i$. Közöttük algebrai szempontból nincs különbség.

A valós számok felsorolt tulajdonságaiból könnyen kaphatjuk, hogy bármely másodfokú, valós együtthatós polinomnak van $a+bi$ alakú, úgynevezett *komplex szám* gyöke. Ugyanennek a polinomnak van egy másik gyöke is, az $a - bi$. Az ilyen alakú párokat egymás konjugáltjának nevezzük.

A komplex számokról a következőket tudjuk:

A komplex számok testet alkotnak. Minden komplex szám egyértelműen felírható $a + bi$ alakba, ahol a, b valós számok és $i^2 = -1$[2].

Összeadásuk és szorzásuk a következőképpen végezhető:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i \quad \textit{és} \quad (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Az $\alpha = a+bi$ és $\overline{\alpha} = a - bi$ konjugáltak szorzata a^2+b^2 pozitív, ha $\alpha \neq 0$, ennek (pozitív) négyzetgyöke az α abszolút értéke (a megfelelő vektor hossza):

$$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\cdot\beta} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}.$$

Minden komplex együtthatós normált polinomnak van komplex gyöke, ezért annyi elsőfokú polinom szorzatára bontható, amennyi a foka.

Cikkünk első részében a gyököket „mátrixalakban” adtuk meg. Így az x^2+1 (valós) polinom gyöke a $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix. Négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ami valóban a (-1)-nek megfelelő skalármátrix. Ennek alapján az $a+bi$ komplex számnak az $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ felel meg.

2. Komplex számok a síkgeometriában

[1]Köszönet illeti a T043034 és T043671 OTKA támogatását.

[2]Tudatosan nem használtuk a $\sqrt{-1}$ jelölést, mert ezzel mintegy kitüntetnénk a két gyök valamelyikét.

Az első részben említettük, hogy a mátrixok homogén lineáris transzformációkat írnak le. Mindenekelőtt felhívjuk a figyelmet arra, hogy különböző méretű mátrixok is összeszorozhatók, ha nem négyzetesek. A „szorzási eljárás” elvégzéséhez az szükséges, hogy az első mátrix oszlopainak a száma megegyezzék a második mátrix sorainak a számával. Mielőtt erre példát mutatnánk előrebocsátjuk a következőket.

Az origóból a sík $(x;y)$ koordinátájú pontjába mutató $\mathbf{v}$ vektort a $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ mátrixszal adjuk meg. Ezt az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal (balról) szorozva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

Eredményünket úgy értelmezhetjük, hogy a fenti mátrixszal jellemzett φ (homogén lineáris) transzformáció a $\mathbf{v}$ vektort az $(ax+by; cx+dy)$ koordinátájú pontba mutató $\varphi(\mathbf{v})$ vektorba viszi át.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni az alábbiakat:

1. Legyen $\mathbf{e}$ az $(1;0)$ és $\mathbf{f}$ a $(0;1)$ koordinátájú pontba mutató vektor. Hova mutat $\varphi(\mathbf{e})$ és $\varphi(\mathbf{f})$? És $\varphi(\mathbf{v})$?

2. Ha ε az E mátrixszal jellemzett függvény, akkor világos, hogy mi lesz $\varepsilon(\mathbf{v})$. De mi lesz $\alpha(\mathbf{v})$, ha α „mátrixa” I? Értelmezzük ezt geometriailag.

3. Milyen alakú az $aE+bI$ mátrix? És az $aE-bI$? Milyen alakú ezek szorzata? Mutassuk meg, hogy ha $a\varepsilon + b\alpha$ egyetlen nem nulla vektort is nullába visz, akkor minden vektort 0-ba visz.

4. Milyen alakú az $aE+bI$ mátrix, ha $a^2+b^2=1$? Ekkor mi lesz $a\varepsilon+b\alpha$ hatása?

5. „Olvassuk le” $a\varepsilon+b\alpha$ hatását általában.

Az eddigi eredményeket úgy foghatjuk fel, hogy a valós számok ismeretében megalkottuk a komplex számokat – pontosabban szólva egy *modellt* alkottunk a komplex számokra, egy olyan testet, amely úgy viselkedik, ahogy a komplex számoktól[3] „elvárjuk”.

3. Kvaterniók

Az algebra alaptétele szerint minden komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke. (Mi ugyan nem ebben az alakban adtuk meg, de könnyen látható, hogy ez ugyanazt jelenti.) Vegyük most a 2×2-es alakú mátrixok elemeit a komplex számok $\mathbf{C}$ testéből. Mivel az x^2+1 polinomnak van gyöke, azért ha a J mátrixot $\mathbf{C}$ feletti mátrixnak fogjuk fel, akkor az $\alpha E + \beta J$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{C})$ alakú mátrixok nem alkotnak testet. Ugyanis az $(\alpha E+\beta J)(\alpha E-\beta J) = (\alpha^2+\beta^2)E$ szorzat O lesz, ha $\beta = i\alpha$, noha egyik tényező sem 0. Ezekkel tehát nem lehet osztani (mint az I. részben láttuk).

Igaz, hogy két komplex szám négyzetösszege lehet 0, de normájuk összege $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$ csak akkor, ha $\alpha=\beta=0$. Kiséreljük meg az egyik tényezőt „átváltani” a konjugáltjára!

A szóbajövő mátrix $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$. Kézenfekvő megoldás, hogy a második sorban minden elem helyébe a konjugáltját írjuk: $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$.

Az világos, hogy két ilyen alakú mátrix összege is ilyen alakú. A szorzat esetében ezt ellenőrizni kell:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & -\delta \\ \overline{\delta} & \overline{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \beta\overline{\delta} & -\alpha\delta - \beta\overline{\gamma} \\ \overline{\beta}\gamma + \overline{\alpha}\overline{\delta} & -\overline{\beta}\delta + \overline{\alpha}\overline{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Eszerint az adott alakú mátrixok gyűrűt alkotnak, mert a figyelembe veendő azonosságok mind teljesülnek – kivéve persze a szorzat kommutativitását. Attól eltekintve, hogy ez – az előzőekben megállapítottak következtében – nem is lehetne igaz, lássuk be. Ahelyett, hogy ezt „általában” bizonyítanánk, elég egy ellenpéldát adni. Az alábbi ellenpéldára a későbbiekben szükségünk is lesz. Legyen

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor ezek szorzata

$$K = IJ = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{míg} \quad JI = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -K.$$

Ennek ellenére elképzelhető, hogy a fenti alakú mátrixok körében elvégezhető az osztás. Természetesen itt beszélhetünk „balosztásról” és „jobbosztásról” is. Ez azt jelenti, hogy adott $A \neq O$ és B elemhez keresünk olyan hasonló alakú X és Y mátrixokat, amelyekre $XA = AY = B$. Tekintettel arra, hogy az E egységmátrix minden mátrixszal felcserélhető, elegendő a $B=E$ eset vizsgálata. Ha viszont minden $A \neq O$ mátrixhoz van olyan X, amelyre $XA=E$, akkor $X \neq O$, tehát van olyan Z, hogy $ZX=E$; így:

$$AX = E(AX) = (ZX)(AX) = Z\big(X(AX)\big) = Z\big((XA)X\big) = Z(EX) = ZX = E.$$

[3] A modellalkotásnak az a haszna – jelen esetben –, hogy ha a valós számok körében nincs ellentmondás (ezt nem tudjuk!!), akkor a komplex számok körében sincs.

Eszerint $AX = E$ is igaz. Természetesen $AY = E$ esetén $YA = E$ is teljesül. Elég tehát az „egyik oldali" osztással foglalkozni. Keresünk tehát adott $U = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ mátrixhoz olyan (hasonló alakú) V mátrixot, amelyre $UV = E$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a következőket jelenti: Adott α és β komplex számokhoz (amelyek nem mindketten egyenlők 0-val) olyan γ és δ komplex számokat keresünk, amelyekre $\alpha\delta + \beta\overline{\gamma} = 0$ és $\overline{\alpha\gamma} - \overline{\beta}\delta = 1$ teljesül. Az első egyenlőséget $\overline{\beta}$-tal, a másodikat α-val szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy $(\beta\overline{\beta} + \alpha\overline{\alpha})\overline{\gamma} = 1$. Mivel a bal oldalon levő első tényező nem 0, γ és (analóg módon) δ is meghatározható. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a kapott két elem teljesíti a kirótt feltételt.

Beláttuk tehát, hogy az $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ alakú komplex elemű mátrixok halmaza az összeadás és szorzás (mátrix)műveletekre majdnem úgy viselkedik mint egy test, csupán a szorzás kommutativitása hiányzik. Ilyen esetekben *ferdetestről* beszélünk. Ma már az algebra sok ágában ezek nagyon fontosak. Ezért ezeket nevezik *testnek*, és ha a szorzás kommutatív, akkor *kommutatív testről* beszélünk. Mi itt az előbbi elnevezést vesszük figyelembe.

Az $\alpha = a + bi$ és $\beta = c + di$ felírással (a, b, c, d valós számok) azt kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezt az összeget az E, I, J, K mátrixjelöléssel a következőképpen írhatjuk fel:

$$aE + bI + cJ + dK.$$

Elnevezés. Az $aE + bI + cJ + dK$ alakú kifejezéseket **kvaternióknak** nevezzük (a, b, c, d valós számok). A kvaterniók összeadása komponensenként történik. A valós számokkal való szorzás is komponensenként történik, és a kvaterniókkal felcserélhető. A kvaterniók szorzása az asszociativitás és (mindkét oldali!) disztributivitás felhasználásával és a következő összefüggések segítségével végezhető el:

(1) $EE = E$, $EI = IE = I$, $EJ = JE = J$, $EK = KE = K$;

(2) $II = JJ = KK = -E$;

(3) $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$ és $JI = -K$, $KJ = -I$, $IK = -J$.

A kvaterniók a fenti műveletekre nézve ferdetestet alkotnak, amelynek a neve kvaterniótest. Az I, J, K elemeket kvaternióegységeknek nevezik.

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2) alapján (3) helyettesíthető az $IJK = -E$ összefüggéssel.

2. A (3) alatti összefüggések könnyebben megjegyezhetők a következő módon: Az $I \to J \to K \to I$ felsorolásban két egymás utáninak a szorzata a harmadik, ha a „nyíl irányában" szorzunk, míg ellenkező irányú szorzásnál a harmadik negatívját kapjuk.

3. A kvaterniókat és a kvaternióegységeket írhatjuk valós elemű mátrixokként is. Gondoljuk meg, hogy a komplex számokhoz 2×2-es valós mátrixokon keresztül jutottunk el. Helyettesítsük tehát az E, I, J, K mátrixok 0, 1, i elemeit rendre a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

mátrixokkal. Ilyen módon a kvaterniókat valós elemű mátrixokkal ábrázoltuk; igaz, ezek 4×4-es mátrixok. (Számoljuk ki!)

A kvaterniókat általában nem mátrixalakban szokták megadni, hanem a következőképpen: $a + bi + cj + dk$ (az $a1$ kifejezés helyett a szerepel, hiszen bármely x kvaternióra $1x = x1 = x$). Ezt a „szokást" mi is átvesszük, azzal az eltéréssel, hogy a kvaternióegységeket vastagított betűvel jelöljük, vagyis a kvaternió az $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ alakot ölti.

Megjegyzés. Az $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ összefüggés azt mutatja, hogy a kvaterniók körében az $x^2 + 1$ polinomnak több mint kettő gyöke van (itt még csak hatot látunk). Ennek nem lehet az az oka, hogy két nemnulla elemnek a szorzata 0 volna, hiszen ez ferdetestben nem fordulhat elő. Az ok csak a kommutativitás hiánya lehet. Ha a polinomokat $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ alakban akarjuk tekinteni, akkor a műveletek elvégezhetősége érdekében vigyázni kell a szorzásnál abban az esetben, amikor az együtthatók szorzása nem kommutatív. Ugyanis az xa kifejezés nem polinom! Ezen úgy segítenek, hogy a határozatlant az együtthatókkal felcserélhetőnek tekintik. Ezért $x^2+1 = (x+\mathbf{i})(x-\mathbf{i})$, hiszen $x(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{i})x$. Ha itt x helyébe $\mathbf{j}$-t írunk, akkor a bal oldalon 0, a jobb oldalon viszont $(\mathbf{j}+\mathbf{i})(\mathbf{j}+\mathbf{i}) = -1+\mathbf{k}-(-\mathbf{k})-(-1) = 2\mathbf{k}$ adódik. Ez azt is jelenti, hogy esetünkben a polinomoknál *a szorzat helyettesítési értéke nem mindig egyezik meg a helyettesítési értékek szorzatával.*

Az $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ felírással az is célunk volt, hogy megmutassuk, egy kvaternió két részből áll: az a *skalárból* és a $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ úgynevezett *tiszta kvaternióból.* A tiszta kvaterniók pontosan megfelelnek a térvektoroknak, ahol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ a koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektorok. Az világos, hogy tiszta kvaterniók összege pontosan a vektorösszeghez tartozó tiszta kvaterniónak felel meg. A szorzat viszont érdekesebbnek bizonyulhat.

Legyen $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ két tiszta kvaternió. Ezek szorzata kilenc tagból áll. E tagokat összevonva a következőket kapjuk:

$$\mathbf{uv} = -(ax+by+cv) + (bz-cy)\mathbf{i} + (cx-az)\mathbf{j} + (ay-bx)\mathbf{k}.$$

Ha fordított sorrendben végezzük el a szorzást, akkor

$$\mathbf{vu} = -(ax+by+cv) - \big[(bz-cy)\mathbf{i} + (cx-az)\mathbf{j} + (ay-bx)\mathbf{k}\big]$$

adódik. A szorzatoknak mind a valós része, mind a tiszta kvaternió része fontos szerepet játszik a matematika különböző ágaiban. Ezeket, megfelelően $(\mathbf{u};\mathbf{v})$, illetve $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ (vagy $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$) jelöli. Az elsőnek a neve *skaláris vagy belső szorzat,* a másodiké *vektoriális vagy külső szorzat.* Ezeket formálisan is könnyen megkaphatjuk a tiszta kvaterniók segítségével: $(\mathbf{u};\mathbf{v}) = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{uv}+\mathbf{vu})$ és $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{uv}-\mathbf{vu})$.

Megjegyzések. 1. Két vektor skaláris szorzatát geometriailag úgy kaphatjuk meg, hogy összeszorozzuk hosszukat, és az általuk közbezárt szög koszinuszát. A vektoriális szorzat egy olyan vektor, amely merőleges a két adott vektor síkjára (ha azok párhuzamosak, akkor a vektoriális szorzat 0), hossza a két vektor hosszának és a közbezárt szög szinuszának a szorzata, és iránya olyan, hogy belőle nézve az első vektort a második irányába forgató szög pozitív.

2. A fenti összefüggés lehetővé teszi, hogy két vektor szögének szögfüggvényeit a vektorok koordinátáiból kiszámítsuk anélkül, hogy a szöget ismernénk.

3. A felírt összefüggésből mindkét szorzatnak számos tulajdonsága leolvasható. Mint például az, hogy mindkettő disztributív az összeadásra nézve, a skaláris szorzat *szimmetrikus,* a vektoriális szorzat *antiszimmetrikus* (mit is jelenthet ez a szó?) stb.

Ha a tiszta kvaterniók szorzatánál a tényezők megegyeznek, akkor azt kapjuk, hogy $\mathbf{uu} = -(a^2+b^2+c^2)$. Ha a megfelelő vektor az origóból az egységsugarú gömb felületére mutat, akkor ez a kvaternió gyöke az x^2+1 polinomnak. A kvaterniók körében tehát egy másodfokú egész együtthatós polinomnak végtelen sok gyöke is lehet. (Aki ismer valamennyi halmazelméletet, az láthatja, hogy a gyökök „kontinuumnyi sokan” vannak.)

4. Hamilton-tól Einstein-ig

A kvaterniókat *W. R. Hamilton* vezette be 1843-ban. Célja az volt, hogy térvektorokat „oszthasson”[4].

Egy kvaternió – mint tudjuk – két részből áll, egy valós részből és egy tiszta kvaternióból. A tiszta kveterniónak megfeleltethetjük a háromdimenziós tér egy pontját, de mit tegyünk a skalárral? Az előbbiek alapján világos, hogy egy tiszta kvaternió négyzete egy negatív skalár, a skalárok négyzete pedig egy pozitív skalár. Ezek valahogy „ellentétesen viselkednek”. 1908-ban *H. Minkowski* egy olyan négydimenziós teret (ez négy koordinátát jelent) vezetett be, amely ehhez van igazítva. Nevezetesen felhasználható a *Lorentz-transzformáció* „leírásához”. Itt a valós tengely felel meg az időtengelynek, mert az idő másképpen viselkedik, mint a tér. Ezzel az ábrázolásmóddal nagymértékben elősegítette az *Einstein*-féle speciális relativitáselmélet megértetését.

Ha korlátozzuk magunkat az idővel és figyelembe vesszük, hogy az idő egy irányba változhat és feltesszük, hogy a „Nagy Bumm” idején van az időskála 0-pontja, akkor a koordinátarendszerben a „helyeket” gömbökkel ábrázolhatjuk. Ha az $\mathbf{u}$ pontot akarjuk a (Nagy Bummtól számított) t időben ábrázolni, ezt úgy tehetjük meg, hogy megnézzük, hova mozdult el a pont t idő után. Ha ez a $\mathbf{v}$ pont, akkor egy t sugarú $\mathbf{v}$ középpontú gömböt veszünk fel. (Ha volna idő a Nagy Bumm előtt, ezt képzetes gömb ábrázolná – bármi is az.)

[4] Ezt a tényt kedves volt tanítványom, *Pelikán József* mesélte el a következő szavak kíséretében: „Ha az ember valamit meg akar érteni, akkor vissza kell menni az eredethez”. Ő ugyanis elolvasta Hamilton eredeti munkáját. Ő ugyanaz a matematikus, aki hosszú évek óta vezeti a magyar csapatot a matematikai diákolimpiákon, és jelenleg is az olimpiai bizottság tagja.