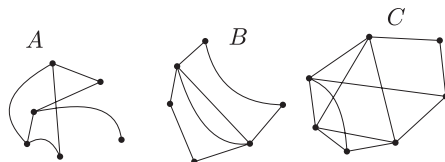


I. rész

1. a) A gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazó vonalat Euler-vonalnak, az olyan Euler-vonalat, amelynek a kezdő és a végpontja egybeesik, Euler-körnek nevezzük. Az ábrán látható három gráf közül mely gráfoknak van Euler-vonala, illetve Euler-köre?



b) Milyen számjegyeket helyettesíthetnek a betűk, ha $R = 0$, különböző betűk különböző számokat jelölnek és az összeadás természetesen helyes eredményt ad?

$$\begin{array}{rcccc}
 & O & R & O & L \\
 + & & A & M & O \\
 \hline
 & A & R & R & A
 \end{array}$$

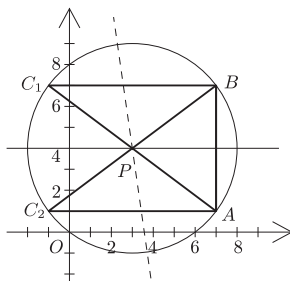
Megoldás. a) Euler-vonala a B és C gráfoknak, Euler-köre csak a B gráfnak van.

b) Ha $R = 0$, akkor a második oszlopot vizsgálva, vagy $R + A = R$ és $A = 0$, de ez nem lehet, mert különböző betűk különböző számokat jelölnek, vagy $R + A + 1 = R + 10$, ami azt jelenti, hogy $A = 9$. Ekkor viszont az első oszlopot nézve $O + 1 = 9$, tehát $O = 8$. Ebből adódóan az utolsó oszlopban $L + 8 = 9$ (más eset nincs), tehát $L = 1$. Végül könnyen látható, hogy $M = 2$. Vagyis:

$$\begin{array}{rcccc}
 & 8 & 0 & 8 & 1 \\
 + & & 9 & 2 & 8 \\
 \hline
 & 9 & 0 & 0 & 9
 \end{array}$$

2. Egy derékszögű háromszög két csúcsa $A(7; 1)$, $B(7; 7)$. Hol lehet a háromszög harmadik csúcsa, ha körülírt köre áthalad az origón? Írjuk fel ennek a körnek az egyenletét.

Megoldás. Az AB szakasz felező merőlegesének egyenlete: $y = 4$.



Az OA szakasz felező merőlegesének egyenlete: $7x + y = 25$.

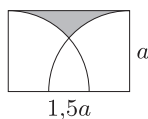
Metszéspontjuk, vagyis a köré írt kör középpontja: $P(3; 4)$.

A P pont nem illeszkedik az AB szakaszra, az tehát nem átmérő.

A C pontok az A -nak és a B -nek a P -re vonatkozó tükröképei: $C_1(-1; 7)$, $C_2(-1; 1)$.

A kör sugara $OP = 5$, a kör egyenlete: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

3. Az ábrán látható téglalap oldalai a és $1,5a$. Mekkora az a sugarú negyedkörlapok által fedetlenül hagyott (az ábrán sötétre színezett) terület nagysága?

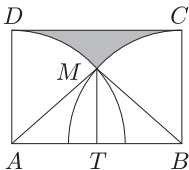


Megoldás. Tudjuk, hogy $AD = a$, és $AB = 1,5a$, tehát $AT = 0,75a$, $AM = a$. Az MAT háromszögből a koszinusz szögfüggvény segítségével $MAT \approx 41,4^\circ$. Ebből adódóan $MAD \approx 48,6^\circ$. Az MAT háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével: $MT \approx 0,6614a$.

$$T_{DMC} = T_{ABCD} - T_{AMB} - 2 \cdot T_{AMD}.$$

$$T_{ABCD} = 1,5a^2, \quad T_{AMB} = \frac{AB \cdot MT}{2} \approx 0,4961a^2,$$

$$2 \cdot T_{AMD} = 2 \cdot \frac{48,6}{360} \cdot a^2 \pi \approx 0,8482a^2, \quad T_{DMC} \approx 0,1557a^2.$$



4. Sík terepen A és B megközelíthetetlen tereppontok távolságát kell meghatároznunk. Ezért kitűzünk egy C pontot, ahonnan a keresett távolságot 60° -os szög alatt látjuk. A 60° -os szög felező egyenesén 50 m-t megtéve, az AB szakasztól távolodva a D pontba jutunk. Innen az A pontba mutató irány 20° -os szöget, a B pontba mutató irány 10° -os szöget alkot az általunk megtett útszakasszal. Mekkora az AB távolság?

Megoldás. Az $\angle ACD = \angle BCD = 150^\circ$, mivel kiegészítő szögek 30° -osak. Ebből adódóan $\angle CAD = 10^\circ$ és $\angle CBD = 20^\circ$.

Az ACD háromszögben szinusz-tétellel: $AD \approx 143,97$ m.

A BCD háromszögben szinusz-tétellel: $BD \approx 73,10$ m.

Az ABD háromszögben koszinusz-tétellel: $AB \approx 88,56$ m.

II. rész

5. a) Rendezzük nagyság szerint növekedő sorrendbe azokat a k számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$7 \mid k^3 + 9k^2 + 23k + 15.$$

Mennyi az így kapott sorozat első 100 elemének az összege?

b) Legyen $a > 1$. Határozzuk meg a következő kifejezés értékét: $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$.

Megoldás. a) A $k^3 + 9k^2 + 23k + 15$ polinomot megvizsgálva látható, hogy $k = -1$ gyöke. A $k + 1$ polinommal elosztva a $k^2 + 8k + 15$ polinom adódik, amely felírható $(k + 3)(k + 5)$ alakban. A $k^3 + 9k^2 + 23k + 15$ polinom tehát átírható $(k + 1)(k + 3)(k + 5)$ alakúra.

Ha az eredeti kifejezés osztható 7-tel, akkor

$$\begin{aligned} k + 1 &= 7, 14, 21, 28, \dots & \text{vagyis} & & k &= 6, 13, 20, 27, \dots & \text{vagy} \\ k + 3 &= 7, 14, 21, 28, \dots & \text{vagyis} & & k &= 4, 11, 18, 25, \dots & \text{vagy} \\ k + 5 &= 7, 14, 21, 28, \dots & \text{vagyis} & & k &= 2, 9, 16, 23, \dots \end{aligned}$$

A keresett összeg a számtani sorozat összegképlete alapján határozható meg:

$$\frac{2 \cdot 6 + 32 \cdot 7}{2} \cdot 33 + \frac{2 \cdot 4 + 32 \cdot 7}{2} \cdot 33 + \frac{2 \cdot 2 + 33 \cdot 7}{2} \cdot 34 = 3894 + 3828 + 3995 = 11\,717.$$

b) Vizsgáljuk meg először a $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$ kifejezés értékét $a > 1$ esetén: $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = x$.

Vehetjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, hiszen egy pozitív valós szám hatványa csak pozitív lehet:

$$\lg a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = \lg x, \quad \frac{\lg(\lg a)}{\lg a} \lg a = \lg x, \quad \lg(\lg a) = \lg x, \quad \text{a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű: } \lg a = x.$$

Most meg kell határozni az $a^{\frac{\lg x}{\lg a}}$ értékét. Behelyettesítve x értékét: $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$ adódik, amiről már tudjuk, hogy $\lg a = x$.

6. Egy dobozban 4 piros és 2 sárga golyó van. Visszatevés nélkül húzunk addig, amíg az első sárga golyót kihúzzuk. A kísérlet kimenetele az ehhez szükséges húzások száma. Ábrázoljuk az így definiált valószínűségi változó eloszlását, illetve számoljuk ki a várható értékét.

Megoldás. Jelölje az első sárga húzás sorszámát x , ennek valószínűségét pedig $P(x)$.

$$P(1) = \frac{2}{6} = \frac{5}{15},$$

$$P(2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

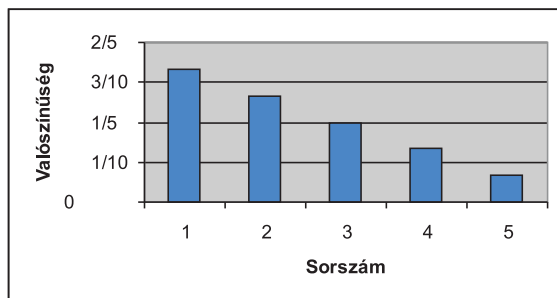
$$P(3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{15},$$

$$P(4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15},$$

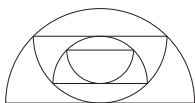
$$P(5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

A várható érték:

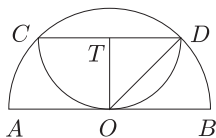
$$E(x) = 1 \cdot \frac{5}{15} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}.$$



7. Az 1 dm átmérőjű félkörbe az ábrán látható módon újabb félköröket írunk. Mennyi a második félkör területe és kerülete? Milyen sorozatot határoznak meg a félkörök kerületei és területei? Véges értéket kapunk-e, ha összeadjuk az így keletkeztetett végtelen sok félkör területét? Ha igen, akkor mennyi ez az összeg?



Megoldás. Legyen $OB = OD = r_0$ és $TD = TO = r_1$. A további beírt félkörök sugarának jelölése: r_2, r_3, r_4, \dots legyen. TDO háromszögből Pitagorasz tételével $r_1 = r_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$, hasonlóan az i -edik félkörre $r_i = r_{i-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.



A második félkör kerülete: $K_1 = 2r_1 + r_1\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

A második félkör területe:

$$T_1 = \frac{r_1^2\pi}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

A kerületek mértani sorozatot alkotnak, ahol $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($K_i = \frac{\sqrt{2}}{2}K_{i-1}$ könnyen belátható). A területek mértani sorozatot alkotnak, ahol $q = \frac{1}{2}$ ($T_i = \frac{1}{2}T_{i-1}$, ez könnyen belátható). A területek sorozatából képzett mértani sor konvergens, hiszen $q = 0,5$, tehát véges a területek összege.

$$S = \frac{T_0}{1-q} = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi}{4}.$$

8. Tekintsük a valós számokon értelmezett következő függvényt:

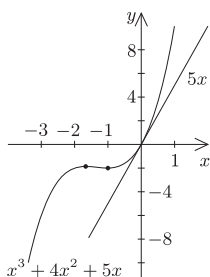
$$x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5x.$$

- Határozzuk meg a függvény zérushelyeit.
- Van-e a függvénynek lokális szélsőértéke? Ha van, akkor határozzuk meg.
- Jellemezzük a függvényt növekedés és fogyás szempontjából.
- Van-e a függvénynek inflexiós pontja? Ha van, akkor határozzuk meg.
- Írjuk fel a függvény érintőjének egyenletét a 0 abszcisszájú pontjában.

Megoldás. a) A függvény zérushelyeit az $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$ egyenlet megoldása adja. Szorzattá alakítva a bal oldalt az $x(x^2 + 4x + 5)$ alakot kapjuk. A zérushelyre csak az $x = 0$ adódik.

b)-c) A függvény deriváltja: $f' = 3x^2 + 8x + 5$, ennek zérushelyei $x_1 = -\frac{10}{6}$ és $x_2 = -1$.

	$x < -\frac{10}{6}$	$x = -\frac{10}{6}$	$-\frac{10}{6} < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x$
f	nő	maximum	csökken	minimum	nő
f'	+	0	-	0	+



A táblázatból látható, hogy $M_1\left(-\frac{10}{6}; -\frac{50}{27}\right)$ lokális maximum, az $M_2(-1; -2)$ lokális minimum.

d) A függvény második deriváltja $f'' = 6x + 8$, ennek zérushelye $x = -\frac{4}{3}$.

	$x < -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < x$
f	konkáv	Inflexiós pont	konvex
f''	-	0	+

e) Mivel $x = 0$ zérushely, ezért a függvény képe az origón, tehát a $P_0(0; 0)$ ponton halad át. Az érintő iránytangensét $f'(0) = 5$ adja. Az érintő egyenlete: $y = 5x$.

9. A táblázat nyolc ország adatait tartalmazza.

- Állítsuk növekvő sorrendbe az egyes országokat népsűrűség szerint.
- Melyik országban a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy egy állampolgár fővárosi?
- Hányféleképpen tudunk kiválasztani az itt felsorolt országok közül négyet úgy, hogy pontosan két európai és pontosan két ázsiai legyen köztük?
- Tekintsük ezen országok lakosságát egy számsokaság elemeinek. Mennyi ennek a számsokaságnak a terjedelme és az átlaga?

Ország	Terület (km ²)	Lakosok száma (fő)	Főváros	Főváros lakossága (fő)
Ausztrália	7 682 300	17 483 000	Canberra	197 000
Banglades	147 570	111 400 000	Dhaka	3 683 000
Hollandia	33 939	15 298 000	Amszterdam	720 000
India	3 287 263	846 303 000	Új Delhi	273 000
Kína	9 608 378	1 198 340 000	Peking	7 000 000
Magyarország	93 036	10 310 000	Budapest	1 992 000
Málta	316	362 000	Valletta	9210
Mongólia	1 565 500	2 250 000	Ulánbátor	619 000

Megoldás. a) Az országok sorrendje népsűrűség (fő/km²) szerint Mongólia (1,44); Ausztrália (2,276); Magyarország (110,82); Kína (124,72); India (257,45); Hollandia (450,75); Banglades (754,896); Málta (1145,57).

b) Mongólia (27,51%).

c) $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 18$ -féleképpen.

d) Terjedelem: $1\,198\,340\,000 - 362\,000 = 1\,197\,978\,000$. Az átlag: 275 218 250.