

I. rész

1. Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós gyöke:

$$\sqrt{x^2 - 2005x - 2006} + \sqrt{x^2 - 2007x + 2006} + \sqrt{x^2 - k^2} = 0. \quad (11 \text{ pont})$$

2. Egy mértani sorozat három egymást követő tagja közül a harmadik -2 . Ha ezt az első kettő elé rakjuk, akkor egy számtani sorozat egymást követő három tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot. (12 pont)

3. Adjuk meg a következő összeget tized pontossággal:

$$\lg\left(7 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \lg\left(7^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \lg\left(7^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\right) + \dots + \lg\left(7^{999} \cdot \sqrt{\frac{999}{1000}}\right). \quad (14 \text{ pont})$$

4. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja 56 cm, a szárjai 53 cm hosszúak. Tudjuk, hogy az AB alap F felezőpontja, a beírt körének az O középpontja, a köré írt körének az K középpontja, az S súlypontja, az M magasságpontja és a C csúcspontja egy egyenesen vannak.

a) Hány háromszöget határoznak meg az F, O, K, S, M, C és A pontok?

b) Számítsuk ki az ASK háromszög területét.

c) Számítsuk ki az FO hosszát. (14 pont)

II. rész

5. Ha a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 3|x|$ és $g(x) = x^2$ hozzárendelésű függvények görbéjét az y tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár alakú testet kapunk. Adjuk meg a két pohár térfogatának eltérését deciliterben, ha a koordináta-rendszer egysége $1,5$ cm. (16 pont)

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = 24,2. \quad (16 \text{ pont})$$

7. Adott három kör az egyenletével:

$$x^2 + 8x + y^2 - 4y + 16 = 0,$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 6 = 0,$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 12y + 36 = 0.$$

a) Számítsuk ki a középpontjaik által meghatározott háromszög kerületét és területét.

b) Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az adott körök belülről érintenek. (16 pont)

8. András és Béla nagyon sokat asztalitenisznek egymással. A tapasztalat azt mutatja, hogy András $0,7$, Béla $0,3$ valószínűséggel nyer meg egy játékot. Ha többször játszanak, akkor azt tekintjük győztesnek, aki többször nyert.

a) Mekkora András nyerési esélye, ha négyszer játszanak?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Béla minden játékot megnyer, ha háromszor játszanak?

c) Hogyan változott András egy játékának nyerési esélye, ha két játék esetén Béla $\frac{5}{9}$ valószínűséggel nem veszít? (16 pont)

9. Igazoljuk, hogy a $2^n \cdot n! < (n+1)^n$ egyenlőtlenség minden 1 -nél nagyobb természetes szám esetén fennáll. (16 pont)