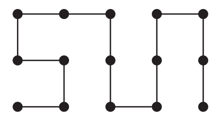
A1. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész előáll egy vagy több 2^r3^s alakú szám összegeként (r és s nemnegatív egészek), úgy, hogy az összeg semelyik két tagja között sem áll fenn oszthatóság. (Például $23 = 9 + 8 + 6$.)

A2. Legyen $S = \{(a, b)\colon a = 1, 2, \ldots, n,\ b = 1, 2, 3\}$. A $p_1, p_2, \ldots, p_{3n}$ pontokat ebben a sorrendben összekötő töröttvonalat az S halmaz egy ***bástyabejárásának*** nevezzük, ha teljesülnek rá a következők: (i) $p(i) \in S$; (ii) p_i és p_{i+1} egységnyi távolságra vannak minden $1 \le i < 3n$ esetén; (iii) minden $p \in S$ esetén pontosan egy olyan i található, amelyre $p_i = p$.

Hány olyan bástyabejárás van, amelyik az $(1; 1)$ pontban kezdődik és az $(n; 1)$ pontban ér véget?

(Az *ábra* egy lehetséges bástyabejárást mutat az $n = 5$ esetben.)



A3. Tegyük fel, hogy az n-edfokú $p(z)$ polinom valamennyi gyöke egységnyi abszolút értékű a komplex számsíkon. Legyen $g(z) = \dfrac{p(z)}{z^{n/2}}$. Bizonyítsuk be, hogy a $g'(z) = 0$ egyenlet valamennyi gyöke egységnyi abszolút értékű.

A4. Legyen H olyan $n \times n$-es mátrix, amelynek minden eleme 1 vagy -1 és a mátrix bármely két sora ortogonális. Bizonyítsuk be, hogy ha H-nak van olyan $a \times b$ méretű részmátrixa, amelynek minden eleme 1, akkor $ab \le n$.

A5. Határozzuk meg $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx$ értékét.

A6. Legyen az $n \ge 4$ adott egész szám. Tegyük fel, hogy a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat egymástól függetlenül, véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választottuk egy körvonalon. Tekintsük azt az n oldalú konvex sokszöget, amelynek a P_i pontok a csúcsai. Mennyi a valószínűsége, hogy ennek a sokszögnek legalább az egyik belső szöge hegyeszög?

B1. Adjunk meg olyan nem zérus $P(x, y)$ polinomot, amelyre minden valós a szám esetén teljesül, hogy $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$. ($\lfloor t \rfloor$ a t-nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelenti.)

B2. Határozzuk meg azokat az $n, k_1, \ldots, k_n$ pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 5n - 4$, továbbá

$$\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

B3. Keressük meg mindazokat a differenciálható $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ függvényeket, amelyekhez létezik olyan a pozitív szám, hogy minden pozitív x számra

$$f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}.$$

B4. Adott pozitív egész m, n számokra jelölje $f(m; n)$ azoknak az egész számokból álló $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-eseknek a számát, amelyekre teljesül, hogy $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \le m$. Bizonyítsuk be, hogy $f(m; n) = f(n; m)$.

B5. Legyen a $P(x_1, \ldots, x_n)$ az $x_1, \ldots, x_n$ változók valós együtthatós polinomja. Tegyük fel, hogy

(a) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) P(x_1, \ldots, x_n)$ azonosan nulla, továbbá hogy

(b) $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ osztja $P(x_1, \ldots, x_n)$-et.

Bizonyítsuk be, hogy a $P(x_1, \ldots, x_n)$ polinom azonosan nulla.

B6. Jelölje S_n az $1, 2, \ldots, n$ számok permutációinak a halmazát. Ha $\pi \in S_n$, akkor legyen $\sigma(\pi) = 1$, ha a π permutáció páros és legyen $\sigma(\pi) = -1$, ha a π permutáció páratlan. Jelölje ezen kívül $\nu(\pi)$ a π permutáció fixpontjainak a számát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{\pi \in S_n} \frac{\sigma(\pi)}{\nu(\pi) + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$