Giovanni Ceva (1647–1736) olasz matematikus tétele arra ad szükséges és elégséges feltételt, hogy egy háromszög egy-egy csúcsán áthaladó három egyenes mikor párhuzamos, vagy metszi egymást egy pontban. Bevezetésképpen idézzük fel a tételt:

1. tétel (Ceva tétele). *Legyen D, E, F rendre az ABC háromszög BC, AC és AB oldalának egy-egy pontja. $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ akkor és csak akkor, ha az AD, BE és CF egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.*

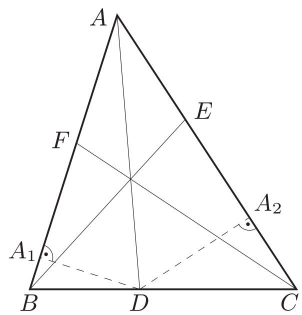
A bizonyítás megtalálható például Hajós György: *Bevezetés a geometriába* c. könyvében [2].

Sok feladatban azonban az említett feltétel bonyolult számításokra vezet. Versenyeken, ahol a feladatok megoldása időhöz van kötve, fontos, hogy minél egyszerűbb, könnyebben használható feltételeket tudjunk felírni. A Ceva-tétel következő, trigonometrikus alakját Matolcsi Máté dolgozatából [4] vettem át:

2. tétel (Ceva tétele, trigonometrikus változat). *Az AD, BE és CF egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak vagy mennek át egy ponton, ha*

$$\frac{\sin BAD\sphericalangle}{\sin DAC\sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBE\sphericalangle}{\sin EBA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ACF\sphericalangle}{\sin FCB\sphericalangle} = 1,$$

azaz az AD, BE és CF szakaszok megfelelő oldalaktól vett távolságarányainak szorzata 1 (1. ábra).



1. ábra

Bizonyítás. Bocsássunk merőlegeseket D-ből az AB és AC oldalakra! A talppontok legyenek A_1 és A_2. Tegyük fel, hogy AD, BE és CF egy ponton mennek át. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sin BAD\sphericalangle}{\sin DAC\sphericalangle} = \frac{DA_1}{DA_2} = \frac{BD \sin\beta}{DC \sin\gamma}$$

és ez éppen az AD egyenesnek az AB és AC oldalegyenesektől mért távolságaránya. Hasonlóképpen $\frac{\sin CBE\sphericalangle}{\sin EBA\sphericalangle} = \frac{CE \sin\gamma}{EA \sin\alpha}$, valamint $\frac{\sin ACF\sphericalangle}{\sin FCB\sphericalangle} = \frac{AF \sin\alpha}{FB \sin\beta}$. Összeszorozva

$$\frac{\sin BAD\sphericalangle}{\sin DAC\sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBE\sphericalangle}{\sin EBA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ACF\sphericalangle}{\sin FCB\sphericalangle} = \frac{BD \sin\beta}{DC \sin\gamma} \cdot \frac{CE \sin\gamma}{EA \sin\alpha} \cdot \frac{AF \sin\alpha}{FB \sin\beta} =$$

$$= \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Megfordítva, ha

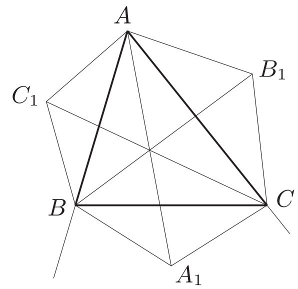
$$\frac{\sin BAD\sphericalangle}{\sin DAC\sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBE\sphericalangle}{\sin EBA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ACF\sphericalangle}{\sin FCB\sphericalangle} = 1,$$

akkor ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, azaz AD, BE és CF egy ponton mennek át. □

Egy szintén rövid, ám Ceva tételét nem használó bizonyítás olvasható a KöMaL egy régebbi számában [1]. Megjegyzendő, hogy a tétel mindkét változata szerepel a *Theorems in the geometry of the triangle* c. angol nyelvű jegyzetben [3].

Térjünk most már rá az alkalmazásokra. Figyeljük meg, hogy az alábbiakban az eredeti Ceva-tételt csak nehézkesen tudnánk alkalmazni, míg a trigonometrikus változat a szinusz-tétel segítségével jól alakítható összefüggéseket eredményez.

1. feladat. *Legyenek a hegyesszögű ABC háromszög oldalaira írt hasonló egyenlőszárú háromszögek ABC_1, BCA_1 és CAB_1. Ekkor az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok egy ponton mennek át* (2. ábra).



2. ábra

Bizonyítás. A módosított Ceva-tételt alkalmazzuk:

$$\frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{\sin A_1AC\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CBB_1\sphericalangle}{\sin B_1BA\sphericalangle}\cdot\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{\sin C_1CB\sphericalangle}=$$

$$=\frac{A_1C}{\sin A_1AC\sphericalangle}\cdot\frac{\sin BAA_1\sphericalangle}{BA_1}\cdot\frac{B_1A}{\sin B_1BA\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CBB_1\sphericalangle}{CB_1}\cdot\frac{C_1B}{\sin C_1CB\sphericalangle}\cdot\frac{\sin ACC_1\sphericalangle}{AC_1}=$$

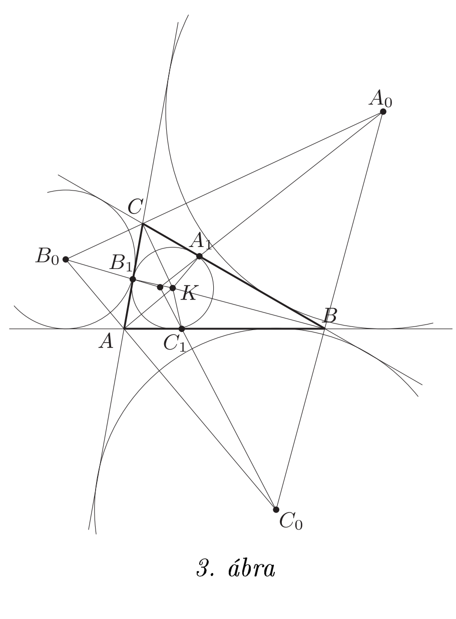
$$=\frac{A_1A}{\sin A_1CA\sphericalangle}\cdot\frac{\sin ABA_1\sphericalangle}{A_1A}\cdot\frac{B_1B}{\sin B_1AB\sphericalangle}\cdot\frac{\sin BCB_1\sphericalangle}{B_1B}\cdot\frac{C_1C}{\sin C_1BC\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CAC_1\sphericalangle}{C_1C}=$$

$$=\frac{\sin ABA_1\sphericalangle}{\sin A_1CA\sphericalangle}\cdot\frac{\sin BCB_1\sphericalangle}{\sin B_1AB\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CAC_1\sphericalangle}{\sin C_1BC\sphericalangle}=1,$$

ahol az első lépésben azt használtuk ki, hogy a háromszögek egyenlő szárúak, a második lépésben pedig a szinusz-tételt. Végül a számlálóban és a nevezőben egyenlő szögek maradtak, hiszen az oldalakra írt háromszögek hasonlósága miatt $ABA_1\sphericalangle=C_1BC\sphericalangle$, $BCB_1\sphericalangle=A_1CA\sphericalangle$ és $CAC_1\sphericalangle=B_1AB\sphericalangle$. $\square$

A következő feladat az 1990. évi Kürschák-versenyen szerepelt:

2. feladat (Kürschák-feladat). *Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen K, a hozzáírt körök középpontjai legyenek A_0, B_0, C_0. Jelölje A_1 a BC oldal és a BKC szög felezőjének, B_1 az AC oldal és a AKC szög felezőjének, C_1 pedig az AB oldal és a AKB szög felezőjének a metszéspontját. Ekkor az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek át.*



3. ábra

Bizonyítás. A_0, B_0, C_0 a megfelelő külső szögfelezők metszéspontja, így az A, B, C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalaira esnek. Az A_0A_1 egyenesre vonatkozó távolságarány az $A_0B_0C_0$ háromszögben

$$\frac{CA_1\cdot\sin BCA_0\sphericalangle}{A_1B\cdot\sin CBA_0\sphericalangle}=\frac{CA_1\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{A_1B\cdot\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Hasonlóan kaphatók a B_0B_1 és a C_0C_1 egyenesre vonatkozó távolságarányok, így e három arány szorzata

$$\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}.$$

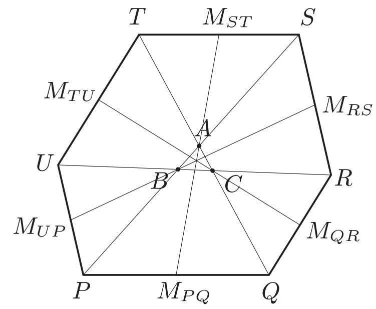
A szögfelezőtétel szerint másfelől

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CK}{BK}, \quad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AK}{CK} \quad \text{és} \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BK}{AK},$$

az említett három arány szorzata tehát 1. Ceva tételének módosított változata szerint tehát az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek át. □

A következő feladat egy olimpiai válogatóversenyen szerepelt 1991-ben:

3. feladat. *Legyenek a $PQRSTU$ hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Igazoljuk, hogy a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő $M_{PQ}M_{ST}$, $M_{QR}M_{TU}$ és $M_{RS}M_{UP}$ szakaszok egy ponton mennek át* (4. ábra).



4. ábra

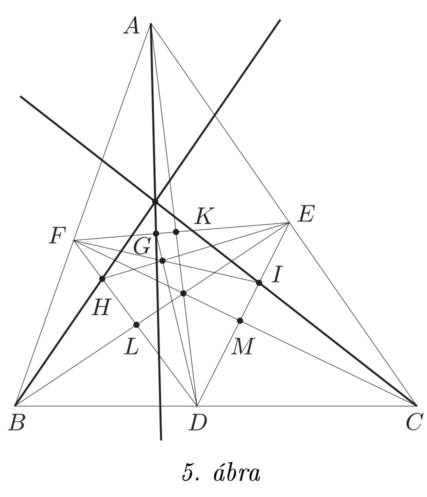
Bizonyítás. Hogy a Ceva-tételt alkalmazhassuk, találnunk kell egy olyan háromszöget, amelynek a csúcsain mennek át a megadott szakaszok. Húzzuk meg a PS, QT és RU átlókat. Ismeretes, hogy egy trapéz átlóinak a metszéspontja rajta van a trapéz párhuzamos oldalait összekötő középvonalán, ezért például M_{PQ}, A és M_{ST} egy egyenesen vannak. (Valóban, PQ és ST párhuzamossága miatt az APQ és az AST háromszögek hasonlóak. Az A fixpontú középpontos hasonlóság, ami P-t S-be, Q-t pedig T-be viszi át, M_{PQ}-t M_{ST}-be viszi, tehát ezek egyenese áthalad A-n.) Egy kis átfogalmazással most már az a feladatunk, hogy belássuk, hogy az ABC háromszög csúcsain áthaladó $M_{PQ}M_{ST}$, $M_{QR}M_{TU}$ és $M_{RS}M_{UP}$ egyenesek egy ponton mennek át. Írjuk fel M_{PQ} távolságát az oldalaktól. Most azonban ne az A csúcsnál levő szöge(ke)t használjuk, hanem az APQ háromszög másik két szögét, amelyekről többet tudunk. Eszerint M_{PQ} távolsága az AB és AC oldalaktól $PM_{PQ} \cdot \sin SPQ\sphericalangle$, illetve $M_{PQ}Q \cdot \sin PQT\sphericalangle$, és minthogy M_{PQ} felezőpont, ezek aránya $\dfrac{\sin SPQ\sphericalangle}{\sin PQT\sphericalangle}$. A szinusz-tétel szerint ez megegyezik $\dfrac{AQ}{AP}$-vel, ami az APQ és az ATS háromszögek már említett hasonlósága miatt $\dfrac{QT}{PS}$-sel egyenlő. Hasonlóan kapjuk, hogy M_{RS}-nek a BC és BA oldalegyenesektől vett távolságainak aránya $\dfrac{PS}{UR}$, míg M_{TU} távolságainak aránya a CA és CB oldalegyenesektől $\dfrac{UR}{QT}$. Ezen arányok szorzata 1, tehát $M_{PQ}M_{ST}$, $M_{QR}M_{TU}$ és $M_{RS}M_{UP}$ valóban egy ponton mennek át. □

Végül egy érdekes típusfeladat:

4. feladat. *Legyenek az ABC háromszögben az AD, BE és CF szögfelezők, a DEF háromszögben pedig a DG, EH és FI szakaszok magasságok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AG, BH és CI szakaszok egy ponton mennek át.*

Ha pusztán az eredeti Ceva tétellel bizonyítanánk, meglehetősen sok, bonyolult arányt kellene kiszámítanunk. Szerencsére az általunk használt trigonometrikus változattal egy egyszerű, egyben jóval általánosabb állítást kapunk.

5. feladat. *Ha az ABC háromszögben az AD, BE és CF szakaszok egy ponton mennek át, valamint a DEF háromszögben a DG, EH és FI szakaszok egy ponton mennek át, akkor az AG, BH és CI szakaszok is egy ponton mennek át.*



5. ábra

Bizonyítás. Legyen K az AD és EF, L a BE és DF, M pedig a CF és DE szakaszok metszéspontja. K távolsága AB-től és AC-től $FK \cdot \sin AFK\sphericalangle$, illetve $KE \cdot \sin KEA\sphericalangle$. Hasonlóan írhatjuk fel L és M távolságát az ABC háromszög megfelelő oldalaitól. Mivel AK, BL és CM egy ponton mennek át, felírhatjuk a Ceva-tétel módosított változatát az ABC háromszögben:

$$\frac{FK \cdot \sin AFK\sphericalangle}{KE \cdot \sin KEA\sphericalangle} \cdot \frac{DL \cdot \sin BDL\sphericalangle}{LF \cdot \sin LFB\sphericalangle} \cdot \frac{EM \cdot \sin CEM\sphericalangle}{MD \cdot \sin MDC\sphericalangle} = 1. \tag{1}$$

Másrészt a DEF háromszögre felírva az eredeti Ceva-tételt:

$$\frac{EK}{KF} \cdot \frac{FL}{LD} \cdot \frac{DM}{ME} = 1. \tag{2}$$

Megszorozva ezzel az előző egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin AFK\sphericalangle}{\sin KEA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin BDL\sphericalangle}{\sin LFB\sphericalangle} \cdot \frac{\sin CEM\sphericalangle}{\sin MDC\sphericalangle} = 1. \tag{3}$$

Hátra van még, hogy azt is kihasználjuk, amit a DG, EH és FI szakaszokról tudunk. A DEF háromszögben alkalmazva Ceva tételét,

$$\frac{EG}{GF} \cdot \frac{FH}{HD} \cdot \frac{DI}{IE} = 1. \tag{4}$$

Elosztva ezzel (3)-at:

$$\frac{FG \cdot \sin AFK\sphericalangle}{GE \cdot \sin KEA\sphericalangle} \cdot \frac{DH \cdot \sin BDL\sphericalangle}{HF \cdot \sin LFB\sphericalangle} \cdot \frac{EI \cdot \sin CEM\sphericalangle}{ID \cdot \sin MDC\sphericalangle} = 1, \tag{5}$$

ez az egyenlőség pedig éppen azt állítja, hogy az AG, BH és CI szakaszok megfelelő oldalaktól vett távolságarányainak szorzata 1, azaz Ceva tételének módosított változata szerint ezek a szakaszok is egy ponton mennek át. $\square$

Köszönetet szeretnék mondani Matolcsi Máténak a cikk alapötletéért, és azért is, hogy [4] dolgozatát felhasználhattam.

Hivatkozások

[1] Surányi János: Az 1990. évi Kürschák József Matematika Tanulóverseny feladatainak megoldása, *Középiskolai Matematikai Lapok,* **41** (1991), 51–61.

[2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1972).

[3] P. Körtesi: *Theorems in the geometry of the triangle,* Junior Mathematical Society Miskolc (Miskolc, 1998).

[4] M. Matolcsi: *Ceva's theorem and a few extensions,* Extended Essay (Atlantic College, 1993).