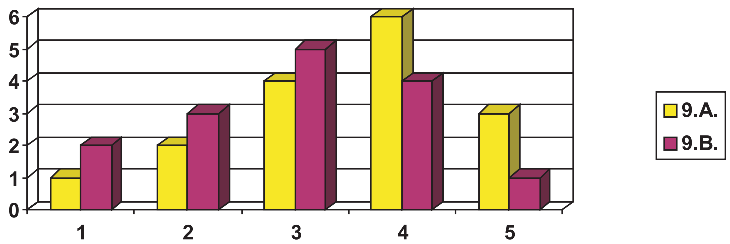
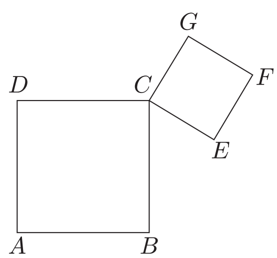
KEZDŐK
Első forduló
Mindhárom kategória

1. Igazolja, hogy $n^3 - 10\,101n^2 + 2n - 111$ mindig osztható 3-mal, ha n pozitív egész szám! (6 pont)

2. Az alábbi táblázat két osztály matematika csoportjainak jegyeit tartalmazza. Ki tudunk-e cserélni a két csoportban két gyereket úgy, hogy a két csoport átlaga megegyezzen? (6 pont)



3. Adottak a síkon az azonos körüljárású $ABCD$ és $CEFG$ közös C csúcsú négyzetek, a B csúcs nem esik egybe az E-vel és a D csúcs nem esik egybe a G-vel. Legyen H a BE szakasz felezőpontja! Bizonyítsa be, hogy a CH egyenes merőleges a DG egyenesre! (8 pont)



4. Mely x, y és z valós számokra teljesül a következő egyenlőség?

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = \frac{1}{z^2 + 4z + 5}$$ (10 pont)

5. Megadható-e a síkon 5 különböző pont úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre és bármely három által alkotott háromszög azonos területű? (10 pont)

Második (döntő) forduló
I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló szakközépiskolai és gimnáziumi tanulók

1. Adott a síkon három nem egy egyenesre eső pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög nem egyenlő szárú. Hányféleképpen vehető fel ezen a síkon az adott pontoktól különböző negyedik pont úgy, hogy az így kapott négy pontból álló halmaznak legyen szimmetriatengelye?

2. Az A, B, és C halmazok elemei természetes számok. Az A-ban a négyzetszámoknál 20-szal kisebb, a B-ben a 10-zel osztva 2 maradékot adó, míg a C-ben a négyzetszámoknál 69-cel nagyobb számok vannak. Keresse meg azokat a számokat, amelyek az A, B, és C halmazok közül pontosan két halmaznak elemei!

3. Mennyi a $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y+3)^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok és $x + 2y - 1 = 0$?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló szakközépiskolai és (nem speciális tanterű) gimnáziumi tanulók

1. Mennyi a $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok és $x+2y-1=0$?

2. Egy négyszög három szomszédos oldala egységnyi hosszúságú és az általuk bezárt szögek 80° és 160°. Mekkora a négyszög másik két szöge?

3. Legyenek p, q és r 3-nál nagyobb prímszámok! Bizonyítsa be, hogy a

$$qr(r-q)+pq(q-p)+rp(p-r)$$

kifejezés osztható 48-cal!

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

1. Legyen P egy (nem elfajuló) paralelogramma belső pontja. Húzzunk P-n keresztül a paralelogramma oldalaival párhuzamos egyeneseket. Ezek a paralelogrammát a T_1, T_2, T_3, T_4 területű részekre bontják fel úgy, hogy $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4$. Legfeljebb hányadrésze lehet T_2 a paralelogramma területének?

2. A k, m, n egész számokra teljesül, hogy $n+1=k^3m-2km$ és $n+2=(km+1)^2$. Mennyi lehet a $kmn+1$ értéke?

3. Értelmezzük a valós számok halmazán a következő függvényeket:

$$f_1(x)=\big||x|-1\big| \quad \text{és} \quad f_n(x)=\big|f_{n-1}(x)-n\big|, \quad \text{ha} \quad n\geq 2\,!$$

Az $f_n(x)$ függvénynek zérushelyei a $-S_n$ és S_n számok, ahol S_n az első n pozitív egész szám összege.

a) Mutassa meg, hogy az $f_n(x)$ függvénynek a $-S_n$ és S_n számokon kívül más zérushelye nincs.

b) Jelölje $T(n)$ az f_n függvény grafikonja és az x tengely közti terület mértékszámát a $[-S_n;S_n]$ intervallumban. Bizonyítsa be, hogy $T(n)$ egész szám!

c) Mely $n\geq 2$ egész számokra lesz $T(n)-T(n-1)$ osztható 2005-tel?

HALADÓK
I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló szakközépiskolai és gimnáziumi tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Egy valós szám négyzetgyöke legfeljebb mennyivel lehet nagyobb magánál a számnál?

2. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amelyre $x^2+19x+95$ négyzetszám!

3. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egy kocka éle, másik befogója ugyanennek a kockának lapátlója. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!

4. Egy 12 egységnyi alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög szárait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a csúcshoz közelebbi harmadolópontban metszi?

5. Összeadjuk egy 2004 jegyű, 9-cel osztható számnak a számjegyeit. Az eredmény számjegyeit újra összeadjuk, végül összeadjuk az így kapott szám jegyeit is. Mit kaptunk?

Második forduló

1. Kincskereső műszerünk hatósugara d méter. (A műszer d sugarú környezetében lévő kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB=30$ m, $BC=40$ m, $CA=50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

2. Az a, b, c páronként különböző pozitív egész számokra $\dfrac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\dfrac{a+b}{b+c}$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $ax+cy=b^2$ egyenletnek mindig van pozitív egész számokból álló $(x;y)$ megoldása.

3. Tekintsük azokat a legalább kétjegyű tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek első számjegye 1, a többi pedig mind egyforma, de nem 0. Ezek között a számok között hány négyzetszám van?

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet a és b ismeretlenre:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{51+10\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}}=a+b\sqrt{2}.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy sakk-körversenyen csak nagymesterek és mesterek vettek részt. Az utóbbiak száma 3-szor annyi volt, mint a nagymestereké, elért pontjaik együttes száma pedig 1,2-szerese volt a nagymesterek pontszámai összegének. A játékosok kétszer játszottak egymással (egyszer sötéttel, egyszer világossal), győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont járt. A verseny végén volt-e az első 3 helyezett között mester?

2. Az $ABCD$ négyszög egységnyi területű. Az ABC, BCD, CDA, DAB háromszögek súlypontja rendre D', A', B', C'. Mekkora az $A'B'C'D'$ négyszög területe?

3. Egy busztársaság egyik korszerű járműve fedélzeti számítógéppel van felszerelve. A számítógép megbecsüli, mennyi idő múlva érkezik meg a busz a következő állomáshoz. A becslést úgy végzi, hogy az útból eddig megtett szakaszra kiszámolja az átlagsebességet, és feltételezi, hogy a hátralevő útszakaszt is ilyen átlagsebességgel fogja megtenni.

Egy alkalommal a busz a fővárostól 100 km-re fekvő településre indult. Az indulás után 40 perccel a számítógép azt jelezte, hogy még 1 óra van hátra a megérkezésig. Ezután 5 órán keresztül folyamatosan az volt olvasható a kijelzőn, hogy a busz 1 óra múlva érkezik célba.

Mekkora része volt még hátra az útnak az indulástól számított 5 óra 40 perc elteltével?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló szakközépiskolai és (nem speciális tanterű) gimnáziumi tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amelyre $x^2+19x+95$ négyzetszám!

2. Egy 12 egységnyi alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög szárait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a közelebbi harmadolópontban metszi?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög körülírt és beírt körének középpontját összekötő egyenes az átfogóval 45°-os szöget zár be, akkor a háromszög egyik szöge 30°-os.

4. Bizonyítsuk be, hogy
a) $2^{2004}+2$ nem lehet két négyzetszám összege,
b) $2^{2005}+2$ pedig felbontható két négyzetszám összegére.

5. Négy valós számból álló páronként kéttagú összegeket képzünk. A hat összeg közül négy darab racionális, kettő irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az eredeti négy szám összege racionális.

Második forduló

1. Kincskereső műszerünk hatósugara d méter. (A műszer d sugarú környezetében lévő kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB=30$ m, $BC=40$ m, $CA=50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

2. Adott 17 darab pozitív egész szám, amelyek prímosztói a pozitív p, q, r, s prímszámok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy a 17 szám közül kiválasztható két olyan, amelyek szorzata négyzetszám.

3. Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^4}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^4}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}+\frac{2}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}=0.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy derékszögű háromszög átfogójának felezőmerőlegese a háromszög területét $1:n$ arányban osztja, ahol n pozitív egész szám. Mekkorák lehetnek a háromszög hegyesszögei?

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész szám reciproka felírható 2005 darab – egymástól páronként különböző – pozitív egész szám reciprokának összegeként.

3. Adott a síkon n darab pont ($n>3$). A pontok közül bármely három lefedhető egy egységnyi területű háromszöglappal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes (mind az n darab) pont lefedhető egy 4 egység területű háromszöglappal.

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Az a_n számtani sorozat elemei pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy ha a sorozat elemei között van négyzetszám, akkor végtelen sok van!

2. Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!

3. Igazoljuk, hogy ha az x, y, z valós számokra teljesül az

$$x+y+z=6 \quad \text{és az} \quad xy+yz+zx=9$$

egyenlőség, akkor az x, y, z számok mindegyike nemnegatív és nem nagyobb 4-nél.

4. Az $ABCD$ konvex négyszögben az $ABD\sphericalangle=20°$, a $DBC\sphericalangle=60°$, az $ADB\sphericalangle=30°$, és a $BDC\sphericalangle=70°$. Bizonyítsa be, hogy a négyszög területe

$$\frac{1}{2}\cdot(AB\cdot CD+AD\cdot BC)\ !$$

5. Legyen f egy olyan függvény, ami egész számpárokhoz 1-et vagy -1-et rendel a következő szabályok szerint:

$$f(0,0)=-1,$$
$$f(1,0)=1$$

és minden (k,l) egész számpárra

$$f(k,l)\,f(k+1,l)\,f(k,l+1)=1, \quad \text{valamint}$$
$$f(k,l)\,f(k-1,l)\,f(k,l-1)=1.$$

Mennyi $f(2005^2,2005)$ értéke?

Második (döntő) forduló

1. Egy derékszögű háromszögbe kétféle módon írunk négyzetet úgy, hogy a négyzet csúcsai a háromszög kerületén legyenek. Legfeljebb hányadrésze lehet a két négyzet területének összege a háromszög területének?

2. Egy asztalon 1004 doboz áll, mindegyikben egy golyó van, ami fehér vagy fekete. Tudjuk, hogy van néhány fehér golyó, összesen páros sok. Egy lépésben rámutathatunk bármelyik két dobozra, és megtudjuk, van-e fehér golyó a párban.

Legalább hány kérdés kell ahhoz, hogy biztosan találjunk két fehér golyót tartalmazó dobozt?

3. Adott a síkon egy pont és egy egyenes. Körző használata nélkül szerkesszük meg a pontnak az egyenesre vonatkozó tükörképét. Használhatunk egyenes vonalzót a szokásos módon és egy egységsugarú körlapot, aminek nem ismerjük a középpontját. Ez utóbbit körvonalzóként használhatjuk, vagyis a síkon adott ponton, illetve pontokon átmenő egységsugarú körvonalakat tudunk rajzolni, de a középpontokat nem tudjuk bejelölni.