Az első részben[1] azt a kérdést vetettük föl, hogy milyen számhármasokat lehet előállítani egy adott $(a;b;c)$ számhármasból kiindulva, ha egy-egy lépésben felcserélhetjük egy számhármasban az elemek sorrendjét, illetve egy már meglévő $(x;y;z)$ számhármasból elkészíthetjük az $(x;y;2x+2y-z)$ számhármast. Az $(a;b;c) \rightsquigarrow (x;y;z)$ jelölést használtuk arra, hogy az $(a;b;c)$ számhármasból el lehet jutni az $(x;y;z)$ számhármasba. Láttuk, hogy ez ekvivalencia reláció. Bevezettük az $n(a;b;c) = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$ mennyiséget, amelyről láttuk, hogy invariáns, nem változik a lépések során: az egyes ekvivalencia osztályokon belül tehát állandó. Ha $a+b+c$ páros, akkor az $N(a;b;c) = \dfrac{1}{4}n(a;b;c)$ egész számot a számhármas normájának hívtuk. Ez az invariáns közvetlenül nem bizonyult elég érzékenynek az **A. 376.** feladat megoldására: $N(5;13;42) = N(1;21;42) = 79$ és mivel nem bizonyítottuk be – nem is igaz –, hogy egyenlő normájú számhármasok ekvivalensek, a fenti egyenlőség ténye nem válaszolja meg a feladat kérdését. Most mutatunk egy az eddigieknél sokkal ravaszabb invariánst. A számolások során hivatkozás nélkül használjuk majd a norma tulajdonságait, amelyeket a cikk első részében igazoltunk.

Lánctörtek

Egy z valós számhoz hozzárendelhetünk egy lánctört alakot:

$$z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ egész számokat a lánctört jegyeinek hívjuk és a következőképpen számolhatók: legyen $z_0 = z$, $a_0 = [z_0]$, $z_1 = \dfrac{1}{z_0 - [z_0]}$, ha z_0 nem egész, $a_1 = [z_1]$, általában pedig $z_i = \dfrac{1}{z_{i-1} - [z_{i-1}]}$, ha z_{i-1} nem egész és $a_i = [z_i]$. Ha z_i egész, akkor megállunk.

Példa.

$$-5{,}6 = -6 + 0{,}4 = -6 + \frac{1}{2{,}5} = -6 + \frac{1}{2+0{,}5} = -6 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}.$$

Ha z nem racionális, akkor nem kaphatunk véges lánctörtet, mert ezek racionálisak. Ilyenkor egészek végtelen sorozatát kapjuk.

Példa.

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}.$$

A következőkben ezt úgy jelöljük, hogy

$$-5{,}6 = L(-6;2;2), \qquad \text{illetve} \qquad \sqrt{2} = L(1;2;2;\ldots) = L(1;\overline{2}).$$

Könnyen látható, hogy $a_0 \in \mathbb{Z}$ tetszőleges lehet, de a_1-től kezdve a jegyek pozitívak, ugyanis $1 > z_j - [z_j] \geq 0$. (Részletesebb) bevezetést ad a lánctörtekbe Freud Róbert – Gyarmati Edit: *Számelmélet* című könyvének 8.3. fejezete.

A továbbiakban olyan speciális számokra lesz szükségünk, amelyek lánctört alakja *periodikus*. A fenti példák közül ilyen a $\sqrt{2}$: a lánctört alak periódusa az egytagú „2” sorozat, amit így jelölünk: $\widetilde{L}\left(\sqrt{2}\right) = (2)$. A periodicitást itt is úgy értelmezzük, mint a tizedestörteknél: elegendő, ha az a_n sorozat valahonnan kezdve periodikus, azaz ha $z_1 = L(3;1;\overline{2})$, $z_2 = L(5;1;4;\overline{2})$, akkor $\widetilde{L}(z_1) = \widetilde{L}(z_2) = \widetilde{L}\left(\sqrt{2}\right) = (2)$.

Feladat. Milyen szám lánctört alakjai az alábbi sorozatok:

$$L(2;2;\ldots) = L(\overline{2}); \quad L(3;1;\overline{2}); \quad L(5;1;4;\overline{2})?$$

Most bizonyítás nélkül kimondunk két tételt.

III. tétel[2]**.** *A z szám lánctört alakja akkor és csak akkor periodikus, ha $z = \dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ alakú, ahol a, b, c egészek, $b>0$ nem négyzetszám és $c \neq 0$.*

---

[1] KöMaL, 2005/10, 398–405. oldal.

[2] A III. tétel bizonyítása megtalálható Niven – Zuckerman, *Bevezetés a Számelméletbe,* Műszaki Kiadó (Budapest, 1978) c. könyvének 146–148. oldalán.

Hívjuk a z_1 és a z_2 valós számokat *hasonlónak,* ha a két szám lánctört alakjában véges sok, nem feltétlenül ugyanannyi kezdeti jegyet elhagyva a megmaradó jegyek sorozata azonos. Két véges lánctört nyilván hasonló és hasonlók például azok a számok is, amelyeknek $L(3;1;\overline{2})$, illetve $L(5;1;4;\overline{2})$ a lánctört alakja.

IV. tétel. *A z_1 és z_2 valós számok pontosan akkor hasonlók, ha léteznek olyan m, n, k, ℓ egészek, amelyekre $|kn-m\ell|=1$ és $z_2=\dfrac{kz_1+\ell}{mz_1+n}$.*

A *IV. tételnek* valójában csak arra a következményére van szükségünk, hogy ha z_1 lánctörtalakja periodikus, és z_2 a tétel szerinti kifejezése z_1-nek, akkor z_1 és z_2 hasonlók. A hasonlóság ebben az esetben azt jelenti, hogy z_2 lánctört alakja is periodikus, a két periódus azonos, $\widetilde{L}(z_1)=\widetilde{L}(z_2)$, bár az egyenlő periódusok a két lánctört alakban általában nem ugyanott kezdődnek.

Feladatok. *a*) Legyen $z_1=\dfrac{5}{6}$, $z_2=\dfrac{4}{7}$. Írjuk fel z_2-t $z_2=\dfrac{kz_1+\ell}{mz_1+n}$ alakban, ahol $|kn-m\ell|=1$. Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha $z_1=L(3;1;\overline{2})$ és $z_2=L(\overline{2})$.

b) Adott valós számokra legyen $z_1\sim z_2$, ha z_2 felírható z_1 segítségével a *IV. tétel* szerinti alakban. Igazoljuk, hogy $\sim$ a valós számok halmazán ekvivalencia reláció.

c) Igazoljuk, hogy ha z_1 és z_2 racionális számok, akkor z_2 felírható z_1 segítségével a *IV. tétel* szerinti alakban.

Megoldás az A. 376. feladatra. Tekintsük a következő kifejezést:

$$[a;b;c]=\frac{\frac{a+b-c}{2}+\sqrt{N(a;b;c)}}{a}.$$

Ekkor

$$\frac{\frac{a+b-c}{2}+\sqrt{N(a;b;c)}}{a}\cdot\frac{\frac{-(a+b-c)}{2}+\sqrt{N(a;b;c)}}{b}=\frac{N(a;b;c)-\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2}{ab}=-1.$$

Azt kaptuk, hogy $[a;b;c]\cdot\big([b;c;a]-1\big)=-1$, vagyis $[b;c;a]=1-[a;b;c]^{-1}$. A *III. tétel* szerint $[a;b;c]$ lánctört alakja periodikus, ha $a\neq 0$ és $N(a;b;c)$ nem négyzetszám. A *IV. tétel* feltételei tehát teljesülnek a $k=m=1$, $\ell=-1$, $n=0$ szereposztással, ezért a két szám, $[a;b;c]$ és $[b;c;a]$ lánctört alakjának azonos a periódusa: $\widetilde{L}\big([a;b;c]\big)=\widetilde{L}\big([b;c;a]\big)$.

Az $\widetilde{L}\big([a;b;c]\big)$ sorozat tehát nem változik, ha a számhármas elemeit ciklikusan permutáljuk. Az a, b, c elemek hatféle permutációja így – legfeljebb – két lánctörtperiódust határoz meg: $\widetilde{L}\big([a;b;c]\big)$-t és $\widetilde{L}\big([b;a;c]\big)$-t. Nézzük most meg, mi történik $\widetilde{L}\big([a;b;c]\big)$-vel a másik, $(a;b;c)\to(a;b;2a+2b+c)$ lépés során.

A definíciók alapján könnyen ellenőrizhető, hogy

$$[a;b;2a+2b-c]=\frac{\frac{a+b-(2a+2b-c)}{2}+\sqrt{N(a,b,2a+2b-c)}}{a}=$$

$$=\frac{-\frac{a+b-c}{2}+\sqrt{N(a;b;c)}}{a}=-[b;a;c]^{-1}.$$

Mivel a *IV. tétel* szerint $\widetilde{L}(-[b;a;c]^{-1})=\widetilde{L}\big([b;a;c]\big)$, azért innen

$$\widetilde{L}\big([a;b;2a+2b-c]\big)=\widetilde{L}\big([b;a;c]\big)$$

következik: az $\Big(\widetilde{L}\big([a;b;c]\big);\widetilde{L}\big([b;a;c]\big)\Big)$ pár tehát invariáns! Hogy tényleg olyan erős, mint ahogy ígértük, az nyomban kiderül, amint ráeresztjük az **A. 376.** feladatra:

$$[5;13;42]=\frac{-12+\sqrt{79}}{5}=L(-1;\overline{2;1;1;1;5;3}),$$

$$[13;5;42]=\frac{-12+\sqrt{79}}{13}=L(-1;1;\overline{3;5;1;1;1;2}),$$

$$[1;21;42]=\frac{-10+\sqrt{79}}{1}=L(-2;\overline{1;7;1;16}),$$

$$[21;1;42]=\frac{-10+\sqrt{79}}{21}=l(-1;1;17;\overline{1;7;1;16}).$$

Azt kaptuk, hogy $\widetilde{L}\big([5;13;42]\big)=(2;1;1;1;5;3)$ és $\widetilde{L}\big([13;5;42]\big)=(3;5;1;1;1;2)$, míg

$$\widetilde{L}\big([1;21;42]\big)=\widetilde{L}\big([21;1;42]\big)=(1;7;1;16).$$

Mivel ez a két perióduspár nem azonos, nem juthatunk el az $(5;13;42)$ számhármasból az $(1;21;42)$ számhármasba a megadott lépésekkel.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy az $\widetilde{L}\big([a;b;c]\big)$ és $\widetilde{L}\big([b;a;c]\big)$ periódusok általában is vagy egyenlők, vagy pedig egymás palindromái. Ami fontosabb, hogy egy ilyen perióduspár már majdnem egyértelműen határozza meg a számhármas ekvivalencia osztályokat: ha két számhármasra ez a pár azonos, akkor bármelyikükből el lehet jutni a másiknak egy *racionális többszörösébe* a megadott lépésekkel. Meg lehet ugyanis mutatni, hogy egy periodikus lánctörttel rendelkező z számból el lehet jutni egy tisztán periodikus lánctörthöz az $f(z)=-\dfrac{1}{z}$ és $g(z)=1-\dfrac{1}{z}$ függvények néhány egymásutáni alkalmazásával. Egy tisztán periodikus lánctörtből pedig kiszámolhatjuk $[a;b;c]$-t. Az egyetlen probléma, hogy $[a;b;c]=[ka;kb;kc]$ miatt a tisztán periodikus lánctört csak konstans szorzó erejéig határozza meg a számhármast, de az könnyen meggondolható, hogy ha $[a;b;c]=[x;y;z]$, akkor létezik olyan r racionális szám, hogy $r(a;b;c)=(x;y;z)$.

Egy osztály gráfja

Egy ekvivalencia osztály természetes módon meghatároz egy gráfot. Mivel a $\rightsquigarrow$ relációban érdektelen az elemek sorrendje, a gráf csúcsai legyenek az ekvivalens számhármasok elemeiből álló háromelemű halmazok és egy $(a;b;c)$ számhármast kössünk össze éllel a belőle közvetlenül elérhető $(a;b;2a+2b-c)$, $(a;2a+2c-b;c)$, $(2b+2c-a;b;c)$ számhármasokkal. Lehetséges, hogy e három számhármasból kettő azonos, sőt, az is megtörténhet, hogy egyikük megegyezik az eredetivel: a hurokélt ilyenkor hagyjuk el. Az így adódó gráf nyilván összefüggő, a csúcsai pedig legfeljebb harmadfokúak.

Tekintsük az olyan számhármasokat, amelyekben van pozitív és negatív szám is. Hívjuk az ilyen számhármasokat *maghármasoknak*. Ezek a fenti gráf egy részgráfját feszítik ki, amelyet *magnak* fogunk hívni. A magban a pontok foka legfeljebb kettő, ugyanis egy maghármas eltérő előjelű számát lecserélve nem magbeli számhármast kapunk.

Célunk a mag és az eredeti gráf leírása.

Az első kérdés, hogy van-e egyáltalán maghármas, illetve ha igen, akkor hány van. Láttuk, hogy egy osztályon belül $n(a;b;c)$ invariáns. Azt állítjuk, hogy ha ez a mennyiség az adott osztályra nem pozitív, akkor az osztály nem tartalmaz maghármast, ha pedig pozitív, akkor legfeljebb csak véges sokat. Tegyük fel ugyanis, hogy $a<0<b$. Ekkor

$$(a+b-c)^2=n(a;b;c)+4ab\le n(a;b;c)-4.$$

Ha $n(a;b;c)\le 0$, akkor ez nyilván nem lehetséges. Ha $n(a;b;c)>0$, akkor csak véges sok négyzetszám kisebb $n(a;b;c)$-nél és mindegyikük legfeljebb véges sok $(a;b)$ és így legfeljebb véges sok $(a;b;c)$ számhármast határoz meg. $\square$

Feladatok. $a)$ Bizonyítsuk be, hogy $n(0;k;\ell)$ négyzetszám.
$b^*)$ Bizonyítsuk be, hogy ha $n(a;b;c)$ négyzetszám, akkor léteznek olyan k,ℓ egészek, hogy $(a;b;c)\rightsquigarrow(0;k;\ell)$.

Legyen $n(a;b;c)$ adott. Az **A. 376.** feladat megoldásakor láttuk, hogy az $n(a;b;c)$ invariáns nem választja szét az ekvivalencia osztályokat, több olyan ekvivalencia osztály is lehetséges, amelynek elemeire $n(a;b;c)$ ugyanaz az érték. Megmutatjuk, hogy ha $n(a;b;c)>0$ és nem négyzetszám, akkor ha nem is egyetlen, de mindenképpen csak véges sok olyan osztály van, amelynek elemeire $n(a;b;c)$ az adott értékkel egyenlő. Ehhez elég megmutatni, hogy minden osztályban van maghármas, ezek száma ugyanis, mint láttuk, véges. Mivel $n(a;b;c)$ nem négyzetszám, így a fenti feladat szerint egyetlen számhármas sem tartalmazhatja a 0-t. Másrészt három pozitív számot tartalmazó számhármas nem lehet összekötve három negatív számot tartalmazó számhármassal, hiszen szomszédos számhármasokban két szám azonos. Ha tehát $n(a;b;c)$ nem négyzetszám és az $(a;b;c)$ számhármas osztálya nem tartalmaz maghármast, akkor az ekvivalencia osztály minden számhármasa azonos előjelű számokból áll: mindegyikük pozitív vagy mindegyikük negatív. A (-1)-gyel való szorzás miatt feltehetjük, hogy minden számhármas csupa pozitív számot tartalmaz. Ennek mond ellent az alábbi

V. tétel. *Ekvivalensek az* $(a;b;c)$ *egész számhármasokra:*
(1) *minden* x, y, z *számhármasra* $\big($*melyre* $(a;b;c)\rightsquigarrow(x,y,z)\big)$ *teljesül, hogy* $x,y,z>0$*;*
(2) $n(a;b;c)<0$ *és* $a>0$.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2). $a>0$ triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy $n=n(a;b;c)\ge 0$, ekkor persze $N=\dfrac{1}{4}n>0$ (még ha nem is feltétlenül egész). Legyen $0<x\le y\le z$ olyan, hogy $(a;b;c)\rightsquigarrow(x;y;z)$ és $x+y+z$ minimális. Ekkor $2x+2y-z\ge z$, így $x+y\ge z$. Tehát $z=x+y-2\sqrt{xy+N}\ge y$, így $x\ge 2\sqrt{xy+N}\ge 2\sqrt{x^2+0}=2x$, ami ellentmondás.

(2) $\Rightarrow$ (1). $xy=\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)^2-N>0$ így x, y, z előjele megegyezik, ez minden lépésben teljesül. Mivel $a>0$, így a végén $x,y,z>0$.

Tehát azonnal kapjuk, hogy véges sok osztály van, ha $n(a;b;c)>0$.

Feladatok. $a)$ Bizonyítsuk be, hogy akkor is véges sok osztály van, ha $n(a;b;c)<0$, vagy ha pozitív négyzetszám.

b) Igazoljuk, hogy ha $n(a;b;c)=0$, akkor végtelen sok osztály van. Mik ezek?

Folytassuk a névadást: azon számhármasokat, amelyekben mind a három szám előjele megegyezik, *héjhármas*oknak fogjuk hívni. Tekintsük a $0<a\le b\le c$ számokat. Ezekre $2b+2c-a>c$, illetve $2a+2c-b>c$, tehát, ha a-t vagy b-t lecseréljük, akkor olyan héjhármast kapunk, amelyben a legnagyobb szám értéke nőtt. Hasonló állítás igaz a negatív elemű számhármasokra is. Ennek az egyszerű észrevételnek messzemenő következményei vannak:

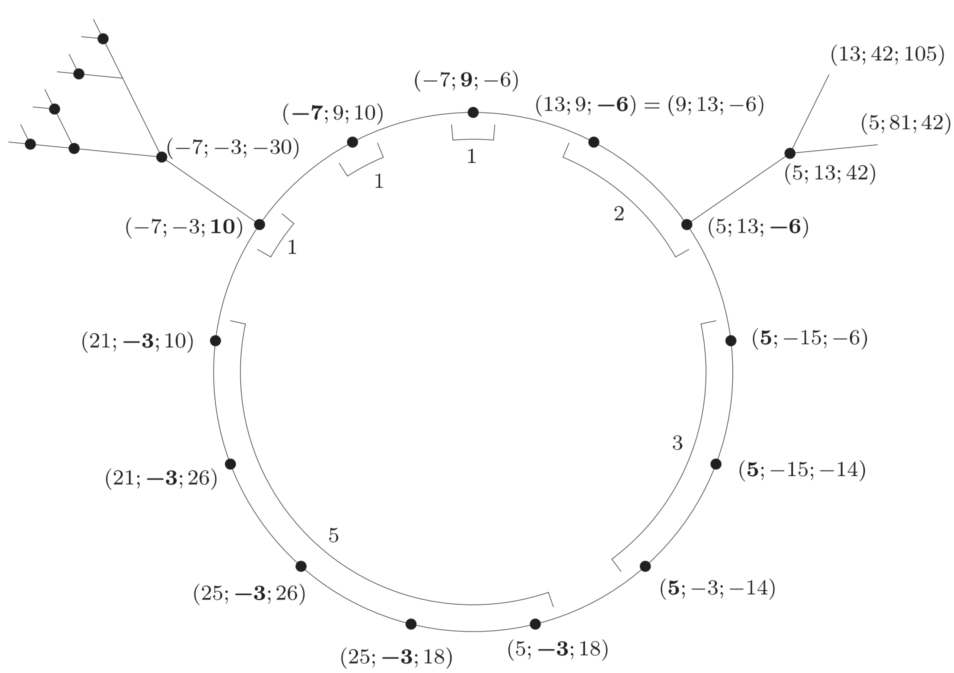
VI. tétel. *a*) *Héjhármasok nem alkothatnak kört.*
b) *Két maghármast nem köthet össze héjhármasokból álló út.*

Bizonyítás. Mindkét esetben feltehetjük, hogy a héjhármasok pozitív számhármasokból állnak (ha nem, akkor szorozzuk az egészet (-1)-gyel).

a) Tegyük fel, hogy van héjhármasokból álló kör és tekintsük a körben előforduló legnagyobb számot. Legyen ez c_m, az ezt tartalmazó számhármas pedig legyen $(a_m;b_m;c_m)$, ahol $0<a_m\le b_m\le c_m$. Az észrevétel szerint a_m-et vagy b_m-et lecserélve c_m-nél nagyobb számot kapunk, tehát a számhármas mindkét szomszédjánál c_m-et kellett lecserélnünk. A két szomszéd tehát megegyezik, ez pedig körben nem lehetséges.

b) Tegyük fel, hogy van két maghármast összekötő héjhármasokból álló út. Legyen $t_1\to t_2\to\dots\to t_{n-1}\to t_n$ egy út a gráfban, ahol $t_k=(a_k;b_k;c_k)$. Feltehetjük, hogy $a_1<0<b_1\le c_1$ és $a_n<0<b_n\le c_n$ és $0<a_k\le b_k\le c_k$, ha $2\le k\le n-1$. Most is vegyük a $3n$ szám közül a legnagyobbat. Az előbbi gondolatmenet szerint ez nem lehet $c_2,\dots,c_{n-1}$ egyike sem. Nem lehet viszont c_1 és c_n sem, mert az első lépésben biztosan a negatív a_1-et cseréljük le $2c_1+2b_1-a_1>c_1$-re, míg az utolsóban a negatív a_n-et $2c_n+2b_n-a_n>c_n$-re. Ez az ellentmondás bizonyítja az állításunkat. $\square$

Ez az egyszerű tétel magában is elintézi az **A. 376.** feladatot. Tekintsük ugyanis az $(5;13;42)$ számhármas osztályának a gráfját. Lépjünk egyet: $(5;13;42)\to(5;13;-6)$, majd a talált maghármasból indulva járjuk be a magot: egy kört kapunk (*ábra*).



Mivel két maghármast nem köthet össze héjhármasokból álló út, azért a mag általában is összefüggő részgráf és egy-egy maghármasból „leágazó gráf” csupa héjhármasból áll. Az így adódó „héjak” ráadásul diszjunktak, megint csak amiatt, hogy két maghármast nem köthet össze héjhármasokból álló út. Mivel láttuk, hogy a héjak körmentesek, mindegyikük egy-egy végtelen bináris fa.

Általában pedig a gráf magja összefüggő gráf, amelyben minden csúcs foka legfeljebb kettő; a mag tehát vagy egy kör, mint az *ábrán,* vagy pedig egy út. Remélem, a gráf szerkezete indokolja a furcsa elnevezések eredetét.

Mivel $(1;21;42)\to(1;21;2)\to(1;-15;2)$ és ez a maghármas nincs benne az $(5;13;42)$ osztályának magjában (*ábra*), azért $(1;21;42)\not\leadsto(5;13;42)$.

Ezzel ismét megoldottuk az **A. 376.** feladatot.

Feladat. Írjuk le az $(1;21;42)$ osztályának a gráfját. Mi lesz a mag?

Érdemes még elidőzni egy kicsit a mag szerkezeténél. Minden maghármasban van egy szám, amelynek előjele különbözik a másik kettőétől: az *ábrán* ezek (vastagon szedve) a következők: 5, -3, 10, -7, 9, -6. Ezek a számok rendre 3, 5, 1, 1, 1, 2-ször fordulnak elő a magban ebben a sorrendben. Ez a számsorozat nem más, mint $\widetilde{L}(13;5;42)$, a már látott $(3; 5; 1; 1; 1; 2)$ lánctörtperiódus! Szemléletesen szólva a lánctörtek jegyei valamilyen „útleírást” adnak meg: hogyan menjünk le a héjról a magig, majd ott körbe-körbe; ennek részletesebb vizsgálatát az Olvasóra hagyjuk.

Említettük, hogy a mag lehet út is. Erre akkor kerül sor, ha találunk benne egy elsőfokú csúcsot. Ekkor persze van a magban egy másik elsőfokú csúcs is, az út másik végpontja. Ennek az egyszerű észrevételnek nagyon hasznos következményei lehetnek:

Feladat. *a*) Legyen p $4k-1$ alakú prím. Mutassuk meg, hogy az $x^2-py^2=2$ vagy az $x^2-py^2=-2$ egyenletek valamelyikének van egész x, y megoldása. (Segítség: az $\big(1; -(p-1); -p\big)$ az út egyik végpontja, mi a másik? Használjuk a 2. tételt a cikk első részéből.)

b) Mit mondhatunk, ha p $4k+1$ alakú prím?

Visszatekintés

Azt hiszem, tanulságos, hogy egy egyszerű „játék” vizsgálata hogyan vezetett el a másodfokú diofantikus egyenletek elméletéhez. A **B. 3822.** és az **A. 376.** feladatok megoldására tett kísérleteink során több megközelítés is kínálkozott: mozgósítottuk a periodikus lánctörtek elméletét, valamint a gráfelmélet eszközeit is. Noha egyszerű észrevételeken múlt, a kapott gráfok szerkezetének a leírása igen hatásos eszköznek bizonyult. A rengeteg feladat talán mutatja, hogy közel sem mondtam el mindent, amit erről a témakörről tudni lehet; aki kedvet kap a további kutatáshoz, maga is biztosan találhat érdekes új eredményeket, vagy újszerű bizonyítást egy-egy már ismert tételre.

Köszönöm *Pataki Jánosnak* értékes észrevételeit.