Előző számunkban közöltük a *Nemzetközi Matematikai Diákolimpia* feladatainak megoldását. Most ismertetjük a moldovai *Iurie Boreico* szépségdíjas megoldását a legnehezebbnek bizonyult 3. feladatra. Nem nagyon van mit hozzáfűzni; egyetlen bravúros lépésben tűnik el a feladat valamennyi méregfoga.

3. *Legyenek x, y, z pozitív valós számok, amelyekre teljesül $xyz \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy fennáll az*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0$$

egyenlőtlenség.

Megoldás. Vegyük észre, hogy

(1) $$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^3-1}{x(x^2+y^2+z^2)}.$$

A pozitív nevezőkkel szorozva és rendezve ugyanis (1) ekvivalens az

$$(x^3-1)\big(x^3(x^2+y^2+z^2)-(x^5+y^2+z^2)\big) \geq 0$$

egyenlőtlenséggel. A második tényező $(x^3-1)(y^2+z^2)$, így annyi kell, hogy

$$(x^3-1)^2(y^2+z^2) \geq 0,$$

ez pedig nyilvánvaló.

A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala ezután tagonként becsülhető alulról az (1)-ből ciklikus helyettesítéssel kapott kifejezések összegével. Elegendő tehát azt igazolnunk, hogy

(2) $$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{x^3-1}{x}+\frac{y^3-1}{y}+\frac{z^3-1}{z}\right) \geq 0.$$

Az első tényező pozitív. A második tényezőben

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xy+yz+zx,$$

hiszen a feltétel szerint $xyz \geq 1$. A (2) második tényezője tehát nagyobb vagy egyenlő, mint $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\big((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\big)$, ez pedig valóban nem negatív: készen vagyunk. A bizonyításból az is kiolvasható, hogy egyenlőség kizárólag akkor teljesül, ha $x=y=z=1$.