A nyári mexikói diákolimpián kétségkívül a **3**. feladat bizonyult a legnehezebbnek. E számunk 388–390. oldalain olvasható *Paulin Roland* megoldása, amelyben egy kevésbé ismert eredmény, a *Muirhead-egyenlőtlenség*[1] alkalmazása volt a kulcslépés. Hogy az olvasó esetleges hiányérzetét enyhítsük, bemutatjuk a tételt működés közben. Az $n=2,3$ esetekben tulajdonképpen a bizonyítás is kiadódik, aki pedig járatos a magasabb dimenziókban, kaphat némi képet az általános esetről is.

A jó szem azért sem árt, mert a tétel különös feltételrendszere egy alapvetően *geometriai* konstrukció révén teszi lehetővé a *súlyozott számtani és mértani közepek* jól ismert egyenlőtlenségének (SAG) kiterjesztését általánosabb, szimmetrikus összegekre.

Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ tetszőleges pozitív számok és a nemnegatív $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ „súlyok” összege 1, akkor

$$(SAG) \qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Az egyenlőtlenség két oldalán az x_i számok λ_i súlyokkal vett számtani, illetve mértani közepe áll. Ha $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$, akkor éppen a számtani, illetve mértani közepeket kapjuk. E két közép nevezetes egyenlőtlensége pedig a tétel jelöléseivel az

$$(1,0,0,\dots 0) \succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow S(1,0,0,\dots 0) \geq S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

alakot ölti.

Az olimpiai feladat megoldása során általános formában hangzott el a *Muirhead*-tétel, így ezt most nem ismételjük el. A jelöléseket illetően – is – javasoljuk a megoldás tanulmányozását. Az ott látottak szerint elhagyjuk a változók indexeit, a példákban ugyanis legfeljebb három változó szerepel majd. Ennek megfelelően az $S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ összegben az x, y, z változók összesen 6 permutációja vesz részt. Így például

$$S(6;5;1) = x^6y^5z + y^6z^5x + z^6x^5y + x^5y^6z + y^5z^6x + z^5x^6y.$$

Ugyanígy

$$S(7;5;0) = x^7y^5 + y^7z^5 + z^7x^5 + x^5y^7 + y^5z^7 + z^5x^7,$$

$$S(3;3;1) = 2(x^3y^3z + y^3z^3x + z^3x^3y).$$

Ha csak két változónk van, $n=2$, akkor például $S(4;1) = x^4y + y^4x$.

Síkban még minden látszik: az $n=2$ eset

Bemelegítésül nézzük meg, hogyan juthatunk el a tétel szerint igaz $S(4;1) \geq S(3;2)$, azaz

$$(1) \qquad x^4y + y^4x \geq x^3y^2 + x^2y^3$$

bizonyításához. (A változók értéke nem negatív, ezt a továbbiakban mindig föltesszük.) Az állítás persze „puszta kézzel” is elintézhető, de most álljunk ellen a kísértésnek. A $(4;1) \succ (3;2)$ feltétel nyilván teljesül: $4+1=3+2$ és $4>3$. A szereplő kifejezések szimmetriájának megfelelően adódó négy számpár természetes módon ábrázolható a koordinátarendszerben (*1. ábra*). A feltétel szerint az $A_1(4;1)$, $A_2(1;4)$, illetve a $B_1(3;2)$, $B_2(2;3)$ pontok ugyanazon az egyenesen vannak (ennek egyenlete $x+y=5$), másfelől a B_i pontok az A_1A_2 szakaszra esnek. Ekkor, a szokásos módon $\mathbf{p}$-vel jelölve a P pont helyvektorát, léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ számok, amelyek összege 1, és például

$$(\mathrm{K}_{12}) \qquad \mathbf{b}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2.$$

Hogy ne csak a levegőbe beszéljünk, a koordinátákra átírt

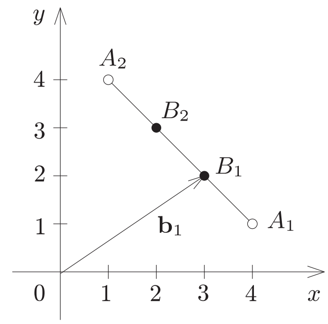
$$(E_{12}) \qquad 3 = 4\lambda_1 + \lambda_2, \qquad 2 = \lambda_1 + 4\lambda_2$$

egyenletrendszer megoldása: $\lambda_1 = \dfrac{2}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}$.

---

[1] **Muirhead-egyenlőtlenség:** *Adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív valós számokra és $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ valós számokra legyen $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\pi \in S_n} x_{\pi(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\pi(n)}^{\alpha_n}$, ahol S_n az $\{1, 2, \dots, n\}$ permutációinak a halmaza.*

Ha $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ olyan valós számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, továbbá minden $0 < k < n$ esetén $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{k} \beta_i$, akkor $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.



1. ábra

A mindent eldöntő észrevétel az, hogy ezek az egyenletek az (1) tagjainak *algebrai kapcsolatát* is kifejezik: ha a λ_1, λ_2 súlyokkal elkészítjük az (1) bal oldalán álló tagok, x^4y és xy^4 *súlyozott mértani közepét*, akkor ebben az x kitevője 3, az y-é pedig 2: éppen a jobb oldal első tagját kapjuk!

Ez pedig nem nagyobb a megfelelő súlyozott számtani középnél:

$$(SAG_{12}) \qquad \frac{2}{3}\cdot x^4y+\frac{1}{3}\cdot xy^4 \ge (x^4y)^{\frac{2}{3}}\cdot(xy^4)^{\frac{1}{3}} = x^3y^2.$$

Szimmetriaokokból – szoktuk mondani ilyenkor – felírható (K_{21}), (E_{21}) és így

$$(SAG_{21}) \qquad \frac{1}{3}\cdot x^4y+\frac{2}{3}\cdot xy^4 \ge (x^4y)^{\frac{1}{3}}\cdot(xy^4)^{\frac{2}{3}} = x^2y^3.$$

Egyenlőtlenségeinket összeadva készen is vagyunk, ugyanis – micsoda szerencse! – az együtthatók összege, $\lambda_1+\lambda_2$ „oszloponként” is 1!

Megjegyzések. 1. Gondoljuk meg, hányféle köntösben jelenik itt meg a szimmetria! Az (1)-ben szereplő kifejezések szimmetrikusak a változók, x és y cseréjére; a megfelelő ábrázolásban ez az A_1, B_1, B_2, A_2 ponthalmaz tengelyes szimmetriáját jelenti a 45°-os egyenesre. A vektor-, illetve koordinátákra vonatkozó egyenletek szintén a koordinátákat fölcserélve, végül a két egyenlőtlenség, (SAG_{12}) és (SAG_{21}) a változók cseréjével kapható egymásból.

2. Az első egyenlőtlenségből közvetlenül eljuthatunk a másodikhoz, ha felcseréljük a két változót. Ez úgy is megvalósítható, ha (SAG_{12}) jobb oldalán a változók helyett az együtthatókat cseréljük fel.

Vegyük észre, hogy a bizonyításnak nincs szüksége arra, hogy mekkorák a λ_i súlyok! Annyi kell „csupán”, hogy ne legyenek negatívak, az összegük 1 legyen, és hogy ... létezzenek!

1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\alpha_1,\alpha_2)\succ(\beta_1,\beta_2)$, akkor az A_1A_2 intervallum tartalmazza a B_1B_2 intervallumot. (Lehetséges, hogy az intervallumok egyetlen ponttá zsugorodnak; mikor?)

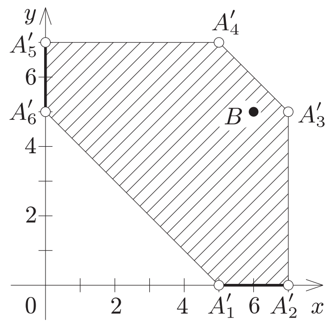
A tér a síkból nézve: az $n=3$ eset

Az olimpiai feladat megoldásában többek között szerepel az $S(7;5;0)\ge S(6;5;1)$ egyenlőtlenség, most ennek járunk utána. Három változónk van, a számhármasoknak megfelelő pontok a *térbeli* koordinátarendszerben ábrázolhatók. A változóknak, illetve egy pont koordinátáinak – szemben a síkbeli két lehetőséggel – most hatféle sorrendje, vagy *permutációja* van. Jelöljük három elem hat permutációjának halmazát a szokásos módon S_3-mal, az egyes permutációkat pedig görög kisbetűkkel. Ha $\sigma\in S_3$ például fölcseréli az első két elemet, akkor az A_σ pont koordinátái $(5;7;0)$. A síkbeli utat követve most nem az A_1, A_2, hanem a hatelemű $\mathcal{A}=\{A_\pi\colon \pi\in S_3\}$ és $\mathcal{B}=\{B_\pi\colon \pi\in S_3\}$ ponthalmazokat kapjuk az $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, illetve a $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ számhármasokból a koordináták permutálásával.

Gondoljunk meg először néhány apróságot, amelyek a síkban nyilvánvaló módon teljesültek.

I. állítás. Az $\mathcal{A}$ és a $\mathcal{B}$ ponthalmazok benne vannak egy közös síkban. Ez nyomban következik abból, hogy a pontok koordinátáinak összege 12, így valamennyien illeszkednek az $x+y+z=12$ egyenletű síkra.

II. állítás. Az A_π pontok egy *konvex* hatszög csúcsai. Ha ugyanis van olyan sík, amelyen egy térbeli $\overline{\mathcal{S}}$ sokszöglemez vetülete egy konvex sokszöglemez, akkor $\overline{\mathcal{S}}$ két konvex halmaz, egy konvex végtelen hasáb és egy sík közös része, így maga is konvex. A *2. ábra* az A_π csúcsok merőleges vetületét mutatja az xy koordinátasíkon: a hatszög láthatóan konvex.



2. ábra

Általában is ez a helyzet, ha az α_i számok páronként különbözők. (Ha a koordináták között két egyenlő van, akkor háromszöget kapunk, ha mindhárom egyenlő, akkor pedig egyetlen pontot.) Természetesen hasonló igaz a B_π pontokra is. A továbbiakban jelölje $\overline{\mathcal{A}}$, illetve $\overline{\mathcal{B}}$ a megfelelő térbeli sokszöglemezeket. A II. állítás szerint $\overline{\mathcal{A}}$ nem más, mint az $\mathcal{A}$ halmaz *konvex burka* és hasonló igaz a $\overline{\mathcal{B}}$ halmazra is.

2. feladat. Legyen $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Adjuk meg az $\overline{\mathcal{A}}$ csúcsainak a sorrendjét az $A_\iota(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ csúcsból indulva az origó felől nézve pozitív körüljárásban. (ι az identikus permutáció.)

III. állítás. $B_\iota = B(6;5;1) \in \overline{\mathcal{A}}$. Ez megint leolvasható a *2. ábráról:* a $B'(6;5)$ pont a $B_\iota(6;5;1)$ pont vetülete az xy-síkon és a vetülethatszög belsejében van. A B'-n keresztül a vetítés irányával párhuzamos egyenes tehát a végtelen hasáb belsejében halad és a B-ben metszi az $\overline{\mathcal{A}}$ síkját.

3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3) \succ (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, akkor $B(\beta_1;\beta_2;\beta_3) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Ismeretes, hogy egy véges $\{P_i\colon i = 1,2,\ldots,m\}$ ponthalmaz konvex burka a

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{p}_m$$

helyvektorú pontok összessége, ahol $\lambda_i \ge 0$ és $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$. A III. állítás szerint tehát **léteznek** a nemnegatív λ_π számok, amelyek összege 1 és

$$\mathbf{b} = \sum_{\pi\in S_3}\lambda_\pi\mathbf{a}_\pi. \tag{K$_\iota$}$$

A koordinátákra nézve ez azt jelenti, hogy a

$$(6;5;1) = \lambda_1(7;5;0) + \lambda_2(5;7;0) + \lambda_3(0;7;5) + \lambda_4(0;5;7) + \lambda_5(5;0;7) + \lambda_6(7;0;5) \tag{E_ι}$$

egyenletnek **létezik** nemnegatív számokból álló megoldása, mégpedig olyan, ahol a λ számok összege 1! Ez a megoldás most is valamiféle „katalizátor” szerepét játssza majd, magukra a λ értékekre nem lesz szükség! Ekkor ugyanis – ahogyan ez (SAG_{12}) esetében történt – az (E_ι) egyenlet azt mondja el, hogy $S(7;5;0)$ hat tagjának a λ_i súlyokkal vett mértani közepében az x kitevője 6, az y-é 5, a z kitevője pedig 1; (SAG) szerint tehát

$$\lambda_1x^7y^5 + \lambda_2x^5y^7 + \lambda_3y^7z^5 + \lambda_4y^5z^7 + \lambda_5x^5z^7 + \lambda_6x^7z^5 \ge x^6y^5z. \tag{SAG_ι}$$

A három változót (SAG_ι)-ban minden lehetséges módon permutálva összesen hat hasonló egyenlőtlenséget kapunk. Ezeket összeadva a jobb oldalon éppen $S(6;5;1)$ adódik. Geometriailag ennek az felel meg, hogy az $\overline{\mathcal{A}}$ halmaz mind a hat B pontot tartalmazza, de ennél többről van szó: a $\overline{\mathcal{B}}$ és az $\overline{\mathcal{A}}$ halmazoknak ugyanazok a szimmetriái: a hat permutáció! Emiatt az egyes B pontok ugyanezen szimmetriák szerint függenek *algebrailag* az A pontoktól. Ha a bal oldalakon a λ számok sorrendjét rögzítjük, akkor a változók permutációi során az x^7y^5 tag – de a többi is – különböző együtthatók mellett bukkan fel: végül begyűjti mind a hatot. Így pedig a hat súlyozott számtani közép összegében minden egyes tag együtthatója $\lambda_{\pi_1} + \ldots + \lambda_{\pi_6} = 1$. A hat egyenlőtlenség összegének bal oldalán tehát éppen $S(7;5;0)$ áll. Így működik a Muirhead-egyenlőtlenség!

4. feladat. Bizonyítsuk be a cikkben igazolt $S(7;5;0) \ge S(6;5;1)$ állítás „felét”, tehát hogy $x^7y^5 + y^7z^5 + z^7x^5 \ge x^6y^5z + y^6z^5x + z^6x^5y$.

5. feladat. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$.

6. feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}.$$

Felhasznált irodalom

[1] J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class,* Cambridge University Press (2004).