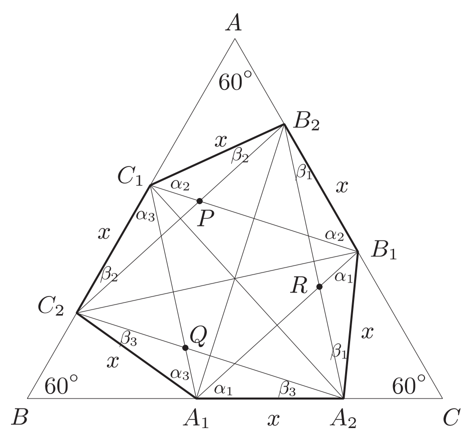
A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Adott hat pont az ABC egyenlőoldalú háromszög oldalain: A_1 és A_2 a BC oldalon, B_1 és B_2 a CA oldalon, C_1 és C_2 az AB oldalon, úgy, hogy ezek a pontok egy $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ konvex hatszög csúcsai, amelynek az oldalai egyenlő hosszúságúak. Bizonyítsuk be, hogy az A_1B_2, B_1C_2 és C_1A_2 egyenesek egy ponton mennek át.*

Steller Gábor megoldása. Legyen az $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ hatszög egyenlő oldalainak hossza x.

Jelölje α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 az $A_1B_1A_2$, $B_1C_1B_2$, $C_1A_1C_2$, $A_2B_2B_1$, $B_2C_2C_1$, $C_2A_2A_1$ egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeit az *ábra* szerint. Legyen B_1C_1 és B_2C_2 szakaszok metszéspontja P, A_1C_1 és A_2C_2 szakaszoké Q, A_1B_1 és A_2B_2 szakaszoké R.



Ekkor $B_1A_2C\sphericalangle = 2\alpha_1$, $A_2B_1C\sphericalangle = 2\beta_1$, $C_1B_2A\sphericalangle = 2\alpha_2$, $B_2C_1A\sphericalangle = 2\beta_2$, $A_1C_2B\sphericalangle = 2\alpha_3$ és $C_2A_1B\sphericalangle = 2\beta_3$ (külső szögek). Így az A_2CB_1, B_2AC_1, C_2BA_1 háromszögek szögeinek összegéből $2\alpha_1+2\beta_1 = 2\alpha_2+2\beta_2 = 2\alpha_3+2\beta_3 = 120^\circ$ adódik. Az A_1RA_2, B_1PB_2, C_1QC_2 szögek nagysága a B_1RA_2, C_1PB_2, A_1QC_2 háromszögek külső szögeiként éppen $\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_2+\beta_2$, $\alpha_3+\beta_3$, azaz mindhárom szög 60°-os.

Az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek megfelelő oldalai így 60°-ot zárnak be, emiatt a háromszögek megfelelő szögei egyenlők, azaz a két háromszög hasonló. Két megfelelő oldalpár arányát felírva és az oldalakat x-szel és a szögekkel kifejezve kapjuk, hogy

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{2x\cdot\cos\alpha_1}{2x\cdot\cos\beta_1} = \frac{2x\cdot\cos\alpha_2}{2x\cdot\cos\beta_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}.$$

Ebből $\cos\alpha_1\cos\beta_2 = \cos\alpha_2\cos\beta_1$, azaz $\beta_i = 60^\circ - \alpha_i$ helyettesítéssel:

$$\cos\alpha_1\cos(60^\circ-\alpha_2) = \cos\alpha_2\cos(60^\circ-\alpha_1)$$

adódik. Az addíciós tétel felhasználásával rendezés után kapjuk, hogy

$$\sin 60^\circ\cos\alpha_1\sin\alpha_2 = \sin 60^\circ\sin\alpha_1\cos\alpha_2, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_1.$$

Mivel $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 60^\circ$, azért $\alpha_2 = \alpha_1$.

Ezt a számítást egy másik oldalpárra hasonlóan elvégezve kapjuk, hogy $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$. Ekkor

$$A_1B_1C_1\sphericalangle = 180° - \alpha_2 - \alpha_1 - 2\beta_1 = 180° - 2\alpha_1 - 2\beta_1 = 180° - 120° = 60°,$$

$$B_1C_1A_1\sphericalangle = 180° - \alpha_3 - \alpha_2 - 2\beta_2 = 180° - 2\alpha_2 - 2\beta_2 = 180° - 120° = 60°.$$

Emiatt az $A_1B_1C_1$ háromszög szabályos, így $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$. Mivel $A_2A_1 = A_2B_1$, $B_2B_1 = B_2C_1$, $C_2C_1 = C_2A_1$, az A_2C_1 szakasz az A_1B_1 szakasznak, B_2A_1 a B_1C_1-nek, C_2B_1 a C_1A_1-nek felező merőlegese. Az A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 szakaszok így az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalfelező merőlegesei, emiatt valóban egy ponton mennek át.

2. *Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egész számoknak egy olyan sorozata, aminek van végtelen sok pozitív tagja és végtelen sok negatív tagja is. Tudjuk, hogy minden pozitív egész n-re az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok n-nel osztva n különböző maradékot adnak. Bizonyítsuk be, hogy minden egész szám pontosan egyszer fordul elő a sorozatban.*

Mánfay Máté megoldása. Először azt mutatjuk meg, hogy a sorozat elemei különbözők. Ha ugyanis valamilyen $n < m$ esetén $a_n = a_m$, akkor a sorozat első m eleme nem alkothat teljes maradékrendszert mod m. Így minden egész szám legfeljebb egyszer szerepel az $\{a_n\}$ sorozatban.

Legyen most $m \geq 2$ egész és tekintsük a sorozat első m eleme közül a legnagyobbikat: legyen ez a_p; és a legkisebbiket: legyen ez a_q; jelöljük továbbá az $a_p - a_q > 0$ különbséget d-vel. Mint láttuk, az első m elem között nincsenek egyenlők, azért $d \geq m - 1$. Másfelől persze $d = a_p - a_q$ miatt $a_p \equiv a_q$ mod d is fennáll, így ha még $d \geq m$ is teljesül, akkor a sorozat első d eleme nem alkot teljes maradékrendszert mod d.

Ebből következik, hogy $d = m - 1$, a sorozat első m eleme m darab különböző egész, amelyek legnagyobbika és legkisebbike között pontosan $m - 1$ a különbség: az első m elem tehát m darab szomszédos egész szám valamilyen sorrendben. Másképpen fogalmazva: az első m elem minden m-re egy „intervallumot" alkot. Ha egy ilyen halmaz tartalmaz két egész számot, akkor bármely köztük lévő egészt is tartalmazza.

Legyen most már k tetszőleges egész szám. Mivel a sorozat végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív számot tartalmaz, van k-nál nagyobb és k-nál kisebb eleme is. A fentiek szerint pedig ekkor a k számot is tartalmaznia kell.

3. *Legyenek x, y, z pozitív valós számok, amelyekre teljesül $xyz \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy fennáll az*

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

egyenlőtlenség.

Paulin Roland megoldása. A bizonyítást több lépésben végezzük el. Először azt mutatjuk meg, hogy elegendő arra az esetre igazolni az állítást, ha az x, y, z számok szorzata 1. Az $s = x^2 + y^2 + z^2$ jelöléssel a bal oldal

$$b(x, y, z) = \frac{x^5 - x^2}{s + (x^5 - x^2)} + \frac{y^5 - y^2}{s + (y^5 - y^2)} + \frac{z^5 - z^2}{s + (z^5 - z^2)}$$