Szerkesztőségünk vitaindítónak szánja a következő cikket, hogy az új típusú, kétszintű matematika érettségivel kapcsolatos vélemények ismertté váljanak. Az érettségi fontossága miatt a közlésre érdemes megállapításokat abban az esetben is megjelentetjük, ha azokkal nem mindenben értünk egyet.

Az újfajta érettségi bemutatkozása után indokolt elemzést adni a felkészítésről és a megvalósításról. Ezt sokféle szempontból meg lehet tenni, itt a KöMaL profiljához igazodva a matematikai problémák bemutatásával, elsősorban az emeltszintű írásbeli feladatsorokat vizsgálom, mégpedig a jó diák szemszögéből.

A diákok és a tanárok felkészítésére szánt nagyszámú próba-, minta-, gyakorló- stb. feladatsor alapján nagyon sok, a matematikai tartalomra vonatkozó probléma vetődött fel. Azt vártuk, hogy ezek elemzésével el fogják érni, hogy a tényleges feladatsorban már nem lesznek vitatható részek.

Jónéhány probléma valóban tisztázódott, de még mindig van javítanivaló. Előfordult, hogy a diák csak találgathatta, hogy mit is kell csinálnia, mi a feladata? Emiatt nem vagyok teljesen elégedett az igazi példasorral sem.

A tanár és a diák egyaránt azt szeretné, ha a másik megértené, amit ő leír, és ugyanúgy értené, ahogyan ő. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha a fogalmak és a konvenciók azonosak, mert sem a feladatban, sem pedig a megoldásban nem lehet mindent nagyon részletesen leírni. Egyértelmű fogalomrendszer és kialakított konvenciók nélkül nem lehet szövegértésről beszélni, hanem csak egymásramutogatás van: „értelmezd helyesen!", „fogalmazd meg jól!".

A gyakorlati életből vett feladatok lelkes hívei nemigen vannak tisztában azzal, hogy a definiálatlan fogalmak elbizonytalanítják a precíz matematikai gondolkodást, és a nem egyértelmű helyzetekre sem a tanárok, sem a diákok nincsenek felkészülve. A felhozott példák talán elgondolkoztatják az olvasót, hogy bizony nemcsak olyan szövegértelmezés lehetséges, amelyre a feladat kitűzője gondolt. Ez még akkor is így van, ha senki nem kifogásolt semmit. A passzivitásnak más oka is lehet, mint az, hogy minden nagyon jó, mindennel meg lehetünk elégedve. A szöveg legyen egyértelmű, vagy ha szándékosan nem az, akkor ennek a megoldásban is tükröződnie kell! Ez jelentené a felkészítést!

A házunk táján maradva a KöMaL-ban az elmúlt tanévben közölt feladatsorokból választottam a tipikus problémák bemutatására szolgáló **mintapéldákat.** Ez csak a jéghegy csúcsa, mert innen is idézhettem volna jóval többet, és a kifogásolható jelenségekre bármely más feladatsorban is találhatók példák.

Az újfajta érettséginek elsősorban azokat a részeit fogom vizsgálni, amelyek eltérnek a régitől. A problémákat négy csoportra osztva tárgyalom.

Az első csoportba azokat soroltam, amelyek a köznapi életből vett szövegrészek miatt lépnek fel. Ezek miatt sokszor **nem érthető, vagy többféleképpen érthető a feladat.**

A második csoportban abból adódó problémák vannak, hogy újfajta, korábban nem tárgyalt feladattípusról van szó, de **a feladatszöveg nem mondja meg, hogy mit várnak el a megoldótól, hogy pontosan mi a feladata?** Pedig meg kellene mondani, mert nem alakultak még ki a konvenciók.

A harmadik csoportnál **a középiskolások számára új matematikai fogalmak szerepelnek a feladatban, de ezek helyes használata még nem alakult ki.** Szerencsére ilyen probléma ritkán adódik.

A negyedik csoportba sorolom azokat a problémákat, amelyek a feladatszövegben és a megoldásban (sajnos nagyon elterjedve) a **következetlenség, pongyolaság, rendetlenség** következményei. Ez talán magyarázható (bár nem menthető) azzal, hogy a köznapi életből vett szöveg miatt nagyon hosszú a feladat szövege és a megoldásé is.

I. Nem érthető, vagy többféleképpen érthető a feladat

1. mintapélda (2004/9/4). *Ágnes* 2005. *március* 25-*én befizet* 600 000 Ft-*ot egy olyan bankba, ahol az évi kamat* 8%-*os és a naptári év végén van kamatelszámolás. Mennyi lesz a követelése* 2006. *március* 25-*én?*

Nyilván két kérdés tisztázatlan:

1. A „kamatelszámolás" jelent-e tőkésítést, tehát hogy ezután a kamat is kamatozik?
2. Időarányosan, vagy más módon (pl. mértani középpel) számolnak-e kamatot a bankok?

Mivel magamtól nem tudtam megtalálni ezekre a helyes választ, jónéhány embertől megkérdeztem. Valamennyien matematikusok, ketten közülük a Közgazdasági Egyetemet is elvégezték. Sokféle választ kaptam.

2. mintapélda (2004/6/OM sorozat, 5). *Egy trópusi lián hajtása egyre lassabban növekszik, ahogy a növény egyre hosszabb lesz. A kicsírázó magból a növény az első hónapban* 100 cm-*re nő, és minden további hónapban megközelítőleg az előző havi növekedésének a* 4/5-*ével lesz hosszabb.*

a) *Mennyit fog nőni a* 21. *hónapban?*
b) *Hány hónap növekedés után lesz* 400 cm-*nél hosszabb?*
c) *Megnőhet-e* 600 cm *hosszúságúra?*

Nyilván a *b)* kérdés értelmezése a kritikus.

Csak egész szám lehet a válasz? Ez nem biztos. A diák tanult a valós számokról. Márpedig a valós számok körében nem lehet a kérdésre válaszolni. Csak a 400 cm-re való megnövekedés időtartamát tudjuk megadni, az ennél nagyobb valós számok között pedig nincs legkisebb!

A közölt megoldás érdekesen kerülte meg ezt a problémát (erre nem gondoltam, és nem is ajánlom a feladatmegoldó diákoknak, hogy ezt a módszert válasszák, annak ellenére sem, hogy a vizsgált példasorokban többször szerepel ez a típus): nem a feltett kérdésre válaszolt(!!) így: „a 8. hónapban éri el a 400 cm-es hosszt."

3. mintapélda (az idei emeltszintű érettségi példasor, 8. feladat). Nem idézem teljesen, csak a szükséges részt.

Magyarország munkaképes lakossága (ezer főre kerekítve) 2003*-ban* 8 500 *(ezer fő). Ennek a növekedése* 2004*-re* 3 *ezrelék. Mennyi volt a munkaképes lakosság száma* 2004*-ben ezer főre kerekítve?*

A megoldásban $8\,500 \cdot 1{,}003$ egész részét adták meg, ez 8 526 (ezer fő).

Márpedig ha 2003-ban a munkaképes lakosság ezer főre kerekített értéke 8 500 000, akkor lehetett 8 499 500 is, ennek 3 ezrelékkel növelt értéke ezer főre kerekítve 8 525 000 vagy 8 525 (ezer fő). Itt bizony hiba van!

Közgazdasági szakközépiskolában tanító tanárok körében köztudott, hogy ha a hivatalos megoldást várják el a diáktól (nem pedig a bonyolultabb helyes megoldást), akkor a feladat szövegében szerepelnie kell az erre való utalásnak pl. úgy, hogy „a kerekített értékkel számolj!" (Pontosan kell fogalmazni.)

4. mintapélda (2004/6/OM sorozat, 9). 1910 *júniusában Lisszabon kikötőjéből indult útnak az Arca nevű gőzös. A* 120 m *hosszú hajó kéményei* 24 m *magasra emelkedtek a tengerszint fölé. Az óceánt átszelni készülő Arca rakterének tekintélyes részét foglalta el az élelmiszer-, ivóvíz- és italkészlet, valamint az M tonna tömegű tüzelőanyag.*

a) Mekkora út megtétele után tűnt el a hajó a megfigyelők szeme elől, akik az útját a partról tízszeres nagyítású látcsővel követték? (A Földet 6 378 300 *méter sugarú gömbnek tekinthetjük.)*

Van *b*) része is a feladatnak, de most azzal nem foglalkozunk.

A feladatban nagyon sok olyan körülmény található, amitől a megoldásban el kell tekinteni, figyelmen kívül kell hagyni, különben nem oldható meg a feladat, vagy más lesz a megoldás.

Ezek közül hármat a megoldásban (ugyan miért nem a feladat szövegében?!) is látunk: a gömbfelszínen mért távolság eltérése az érintőn mért távolságtól; a hullámzás módosító hatása; a Föld nem tökéletes gömb alakja.

Ezekhez még hozzá lehet venni további komoly és humoros módosító tényezőket, pl.: a hajóhossz; a part és a kémény távolsága induláskor; a kémény emelkedése a rakomány csökkenésével; a gőzös füstöl annyira, hogy elég hamar semmit sem lehet látni; ennyi utat megtéve már besötétedik, akkor pedig semmit nem látni stb.

A diák tényleg nem tudhatja, hogy ebben a feladatban nem az-e a poén, hogy a megoldó áttekinti-e a gyakorlati helyzetből adódó jellemzőket? Tanulságos összehasonlításul megnézni a KöMaL honlapján a vicces történetek közt azt a feladatot, amelyik egy épület magasságának barométer segítségével való meghatározását kéri.

II. A feladatszöveg nem mondja meg, hogy mit várnak el a megoldótól, pontosan mi a feladata?

5. mintapélda (2004/6/2). *Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$\frac{(x-1)^2}{16} \le \log_5 x.$$

Egy egyenlet vagy egyenlőtlenség grafikus megoldását újabban gyakran kérik a példasorokban. Ez a feladattípus azért jelent problémát, mert a grafikus megoldás fogalma (hogy mit kell csinálnia a megoldónak) nem egyértelmű. Különösen a megoldás első része, a függvényábrázolás fogalma szorul tisztázásra.

Ez akkor érződik igazán, ha a függvény grafikonja nem egyenes, vagy nem egyenes szakaszokból áll.

Mivel nem mondják meg, hogy milyen pontok felvételével kell az ábrázolást elvégezni (a németeknél mondják!!), én az ilyen feladatok mindegyikénél tudtam olyan függvényábrázolást bemutatni, amelynél néhány pont felvételével és a függvények ismert tulajdonságait (monotonitás, konvexitás) nem sértve helytelen eredmények olvashatók le.

Ezért lenne fontos, hogy egyértelmű és közismert konvenciók szerint lehessen értelmezni az ilyen feladatokat.

Szélsőséges esetet is megengedve például ki lehetne mondani azt is, hogy először egzakt (algebrai) módon meg kell oldani a feladatot, és utána egy vázlatrajzon megjeleníteni a megoldást. Mint ahogy a hagyományos szövegű feladatoknál régóta konvenció, hogy a „szerkesszük meg ..." kezdetű feladatszöveg nem a szerkesztést, hanem a szerkesztés lépéseinek leírását, azok helyességének bizonyítását, esetleg a diszkussziót is jelenti.

Még nem is beszéltem az ábrázolásnál használt intervallum megadásának szükségességéről, illetve a megadás hiányának buktatóiról. Például mindenképpen kifogásolható az a feladat, amelyben a valós számokra értelmezett függvény ábrázolását $x > 1000$ esetére kérik (2005/2/9).

6. mintapélda (2004/6/OM középszintű sorozat, 3). *Köralakú amfiteátrum küzdőterének két átellenes pontján áll egy-egy gladiátor, az uralkodó a pálya szélén ül. A gladiátorok egyenes vonalban odafutnak az uralkodóhoz. Az egyik* 20 *métert, a másik eggyel többet tesz meg, amíg odaér. Mekkora az amfiteátrum sugara? Készítsen ábrát is a megoldáshoz!*

A grafikus megoldás kérésével rokon probléma van itt.

Ha a diák komolyan veszi az ábrázolásra felszólító szöveget, akkor bizonyára megjegyzi, hogy ekkora papírja nem lévén, méretarányt választ, a mérethelyes ábrázolásra törekedve így és így jár el, mindent kiszámol, felír stb. Sok munka után elkészül az ábrával, és amikor elolvassa a hivatalos megoldást, bosszankodva látja, hogy mennyit dolgozott feleslegesen, mert csak nagyon szerény kivitelt várnak el az ábrától.

Amikor a Műegyetemen ábrát kérnek a diáktól, akkor még azt is pontosan megadják, hogy milyen betűtípussal, milyen vonalvastagsággal, milyen feliratokkal stb. kell azt elkészíteni. Ekkor lehet az ábrakészítést osztályozni. A követelmények ismertetése nélkül pontozni az ábrakészítést (függvényábrázolást) nem szabad(na)!

Az újabban divatos, a köznapi élet szavaival alkotott, matematikai szempontból teljesen értelmetlen kérdések tipikus példája a következő feladat-részlet.

7. mintapélda (2004/8/4). *Tekintsük a következő diagrammot. Egy 10 éves periódusban a beültetett és a kivett vesék darabszámát olvashatjuk le róla.*

... Itt az ábra és a most érdektelen *a*) kérdés ...

b) *Ábrázoljuk az első és az utolsó három évben a beültetett és a kivett vesék arányát.*

c) *Levonható-e valamilyen következtetés a kapott ábráról?*

A *c*) rész nyilván legegyszerűbb jó megoldása: „Igen, valamilyen következtetés levonható, nagyon sok hibás következtetés biztosan levonható!”

III. Középiskolások számára új matematikai fogalmak szerepelnek a feladatban, de ezek helyes használata még nem alakult ki

8. mintapélda (2004/6 OM sorozat 3). *Határozza meg grafikonjuk egyenletével megadott, a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvények értékkészletét! Vizsgálja e függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából, rajzolja meg grafikonjukat derékszögű koordinátarendszerben!*

a) $y = x \cdot |x|$;

b) $y = (\sin x + \cos x)^2$.

Nem ecsetelem a megoldó kínjait, amikor döntenie kell, hogy mindenképpen hiányos megoldásként, de mégis valamit csinálva a grafikonoknak melyik részét ábrázolja? Különösen a *b*) függvénynél kényes a kérdés. Ez az előző rész problémája volt.

Itt ezt a feladatot azért mutatom be, mert szerintem nem világos, hogy mit jelent „a függvény vizsgálata szélsőérték szempontjából”.

Ugyanis el tudom képzelni, hogy ma már elvárják a szélsőérték nyolc fajtájának (minimum – maximum, helyi – abszolút, szigorú – nem szigorú) ismeretét, és ezért a vizsgálatát. Ennél a feladatnál a hivatalos megoldás ezt nem tartalmazza minden részletében. Nem biztos, hogy máskor sem kell kitérni a finomságokra.

A következő problémánál eltekintek konkrét feladat közlésétől, mert szinte minden olyan feladat (az ideiek is) említhető lenne, amelyben a valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja szerepel. Csak felhívom a figyelmet arra, hogy az ilyen feladatoknál természetesnek veszik és le sem írják, hogy a kiválasztások egyformán valószínűek („véletlenszerűen kiválasztunk” nem ezt jelenti). Az elemi esemény fogalma pedig mintha nem is létezne!

IV. Következetlenség, pongyolaság, rendetlenség

Sajnos, nagyon sok feladatot vehetnék ide. Az idézett példáknál nem írom le a teljes szöveget vagy a teljes megoldást, hanem csak azokat a részleteket, amelyekből már világos a probléma.

Hangsúlyozom, hogy ezek **nem értelemzavaró hibák, de hibák.**

9. mintapélda (2005/2/3). *Egy trapéz magassága, egyik, illetve másik átlója ebben a sorrendben egy $q = 2$ hányadosú mértani sorozat három szomszédos tagja. ...*

A mértani sorozatnál az tanítjuk, hogy elemei számok (és nem szakaszok).

10. mintapélda (2004/8/9). *Válasszuk ki az* 50 cm *kerületű, egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra rajzolható négyzetek területösszege.*

Megoldás. ... az a szabályos háromszög, amelynek oldala $\dfrac{50}{3}$ egység.

Tudom, hogy reménytelen elvárni a rendet a fizikai mérték, az egység és a szám használatánál, de legalább egy feladaton belül illene elkerülni a keveredést.

Megjegyzések. 1. Mértékegységet a fizikában és a köznapi életben használunk, a matematikában nem. A téglalap alakú asztallap egyik oldalának hossza lehet 50 cm, de a téglalap oldalának hossza 50.

2. Szakaszkalkulusban van egység, mint az algebrában is van egységelem, de az nem szakaszhossz, hanem maga a szakasz.

3. Matematikában a mérték szám. A középiskolás tankönyvek is úgy fogalmazzák pl. a területet, hogy az bizonyos tulajdonságoknak eleget tevő szám.

4. Minden fizikai mennyiségnek (mértéknek) van dimenziója (mértékegysége), matematikában egyiknek sincs. Egy háromszög területe éppúgy 2 és nem 2 területegység, mint ahogy egy függvény differenciálhányadosa egy pontban 2 és nem 2 differenciálhányadosegység.

11. mintapélda (a 2005. május 28-án írt középszintű példasor 2., 3. és 4. feladata).

2. *Egy* 40 000 Ft*-os télikabátot a tavaszi árleszállításkor* 10%*-kal olcsóbban lehet megvenni. Mennyi a télikabát leszállított ára?*

3. *Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek hossza* 15 cm*,* 12 cm *és* 8 cm*. Számítsa ki a téglatest felszínét!*

4. *Egy kör sugara* 6 cm*. Számítsa ki ebben a körben a* $120°$*-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét!*

Azt is kifogásolhatnám, hogy 3. feladatban ki van írva a „hossza" szó, a 4.-ben nincs. Nyilván mindkét helyre kellene. Ennél nagyobb – és nem tudom, hogy szándékos vagy véletlen – következetlenség van a megoldásban és a hozzájuk fűzött értékelésben dimenzió-ügyben.

Az eredményt egy rubrikába kell írni, ahol a 2. és a 3. feladatnál nincs a dimenzió (Ft, illetve cm^2) előnyomtatva, a 4. feladatnál igen. A értékelés szerint, ha a diák a 3. feladatnál nem ír dimenziót, akkor pontlevonás jár. A 2. feladatnál miért nem? Pontatlanság pontatlanság hátán!

12. mintapélda (2004/7/7). *Egy víztorony* (P) *távolságát kell az* 1 : 250 000 *arányú térkép segítségével az* A *falutól meghatározni. . . .* (további, most nem részletezett adatok) *. . . Mekkora az* AP *távolság a valóságban?*

Megoldás. . . . $AP = 13{,}46$ cm. Figyelembe kell venni azonban a térkép méretarányát, így a valóságban 33,65 km.

Tudom, hogy a betűzés kettős szerepet játszik, de nem örülök neki, zavaró a pontatlanság.

Ráadás, a konkrét feladat megjelölése nélkül

A közelítő értékekkel kapcsolatos pongyolaság nem újkeletű, de itt is tárgyalom, mert a gyakorlatból vett példákra hivatkozva egyesek esetleg bocsánatos bűnnek, vagy nem is bűnnek tekintik ezt.

Három, a feladatmegoldásokban gyakran előforduló típushibát ismertetek, de a teljes feladat és megoldás leírása nélkül, mert nyilván könnyű megtalálni őket.

Az egyik típus: $\approx$ helyett $=$ van.

A másik típus: A megoldás közben még $\approx$ van, de a feladat kérdésére adott szöveges válasz már nem jelzi, hogy az eredmény közelítő érték.

A harmadik típus: Egyáltalán nem adják meg a közelítő értéket, csak a keresett mennyiséget valamilyen függvény (művelet) jelét is használva, pl.: $t = 27\sqrt{6}$.

A közelítő értékek kezeléséhez tartozik a numerikus értékeknek grafikonról való leolvasása. Ilyen volt az idei, május 28-án írt, középszintű érettségi példasorának 15. feladata, ahol egy időpontot kellett leolvasni az ábráról. A hivatalos megoldásban – nyilván a durva kivitelezésű ábra miatt – két érték is szerepelt így: „A 30. másodpercnél vagy a 31. másodpercben. *Megjegyzés:* „Ha több időpontot is megjelöl, nem kaphat pontot."

Most nem elemzem a megjegyzés szövegének különféle értelmét, illetve érthetetlenségét, hanem arra hívom fel a figyelmet, hogy a megoldás a közelítő értéket úgy kezeli, mintha az 1 oldalhosszúságú négyzetnél az átló hosszának kiszámításakor a $\sqrt{2}$ értékére azt mondaná, hogy az 1 vagy 2.