## Első nap

**1.** Adott hat pont az $ABC$ egyenlőoldalú háromszög oldalain: $A_1$ és $A_2$ a $BC$ oldalon, $B_1$ és $B_2$ a $CA$ oldalon, $C_1$ és $C_2$ az $AB$ oldalon, úgy, hogy ezek a pontok egy $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ konvex hatszög csúcsai, amelynek az oldalai egyenlő hosszúságúak. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_2$, $B_1C_2$ és $C_1A_2$ egyenesek egy ponton mennek át.

**2.** Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egész számoknak egy olyan sorozata, aminek van végtelen sok pozitív tagja és végtelen sok negatív tagja is. Tudjuk, hogy minden pozitív egész $n$-re az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok $n$-nel osztva $n$ különböző maradékot adnak. Bizonyítsuk be, hogy minden egész szám pontosan egyszer fordul elő a sorozatban.

**3.** Legyenek $x$, $y$, $z$ pozitív valós számok, amelyekre teljesül $xyz \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy fennáll az

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

egyenlőtlenség.

## Második nap

**4.** Tekintsük azt az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot, amit az

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

képlet definiál. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, ami relatív prím a sorozat minden tagjához.

**5.** Az $ABCD$ konvex négyszög $BC$ és $AD$ oldalai egyenlő hosszúságúak és nem párhuzamosak. Legyenek $E$, illetve $F$ rendre a $BC$, illetve $AD$ oldal olyan belső pontjai, amikre $BE = DF$ teljesül. Az $AC$ és $BD$ egyenesek metszéspontja $P$, a $BD$ és $EF$ egyenesek metszéspontja $Q$, az $EF$ és $AC$ egyenesek metszéspontja $R$. Tekintsük az összes $PQR$ háromszöget, amint $E$ és $F$ változnak. Bizonyítsuk be, hogy ezen háromszögek körülírt köreinek van egy $P$-től különböző közös pontja.

**6.** Egy matematikaversenyen 6 feladatot kellett a versenyzőknek megoldani. Bármelyik két feladatra igaz az, hogy a versenyzők $\frac{2}{5}$ részénél többen oldották meg mindkét feladatot. Senki nem oldotta meg mind a 6 feladatot. Bizonyítsuk be, hogy volt legalább 2 olyan versenyző, aki pontosan 5 feladatot oldott meg.